Szczepan Jeleński

ROZRYWKI MATEMATYCZNE

I

LILAVATI

II

ŚLADAMI PITAGORASA



SZCZEPAN JELEŃSKI

LILAVATI

ROZRYWKI MATEMATYCZNE

OPRACOWAŁA
EMILIA JELEŃSKA

POD REDAKCJĄ
A. M. RUSIECKIEGO

PAŃSTWOWE ZAKŁADY
WYDAWNICTW SZKOLNYCH

OŚRODKI KULTURY MATEMATYCZNEJ W STAROŻYTNOŚCI

MORZE ŚRÓDZIEMNE

MORZE CZARNE

RZYM

ELEA

TARENT

KROTON

SYRAKUZY

ARCHIMEDES

ARYSTOTELES

STAGIRA

NICAIA

PLATON

CHIOS

SAMOS

ATENY

MILET

KNIDOS

PERGE

KYRENE

ERATOSTHENES

EUKLIDES

ALEKSANDRIA



ARCHIMEDES (Syrakuzy) • ARYSTOTELES (Stagira) • APOLONIUSZ (Aleksandria, Perge) • ERATOSTHENES (Kyrene, Aleksandria) • EUDOXOS (Knidos) • EUKLIDES (Aleksandria) • DIOFANTOS (Aleksandria) • HERON (Aleksandria) • HIPPARCH (Nikaia) • PITAGORAS (Kroton, Samos, Tarent) • PLATON (Ateny) • PTOLEMEUSZ (Aleksandria) • TALES (Milet) • VITRUVIUS (Rzym) • ZENON (Elae)

OŚRODKI KULTURY MATEMATYCZNEJ W ŚREDNIOWIECZU

OCEAN ATLANTYCKI



TOLEDO

KORDOBA



PIZA



KONSTANTYNOPOL

MORZE ŚRÓDZIEMNE



BUGIA



ALEKSANDRIA

M. KASPIJSKIE



BAGDAD



CHOREZME

AL CHOVARIZMI (Chorezme) * ARYABHATA (Patna) * BRAHMAGUPTA (Ujjain) * BHASKARA (Ujjain)

GŁÓWNE OŚRODKI KULTURY MATEMATYCZNEJ

Bagdad * Kordoba * Toledo * Konstantynopol

M. CZERWONE





PATNA

UJJAIN

OCEAN INDYJSKI

Obwolutę, okładkę, wklejki i ilustracje wykonał
JULIUSZ KRAJEWSKI

Redaktor
STEFAN OLCZAK

Redaktor techniczny
ZOFIA NARTOWSKA

Książka zatwierdzona przez Ministerstwo Oświaty
do bibliotek szkolnych i nauczycielskich

Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych — Warszawa 1964

Wydanie V zmienione. Nakład 20 000+250 egz. Ark. druk. 19,5; wyd. 19,50
Oddano do składania 3. XII. 1962 r. Podpisano do druku 3. X. 1964 r.
Druk ukończono w listopadzie 1964. Zam. 4323/1256. C-8. Cena zł 57.—
Papier offset. 70×100 cm, 90 g, kl. III z PWPW w Warszawie

Zakłady Graficzne PZWS w Bydgoszczy, ul. Jagiellońska 1

PRZEDMOWA

Lilavati — skąd taka dziwaczna, egzotyczna nazwa dla skromnego zbioru rozrywek matematycznych?... Co oznacza to słowo, dość zresztą mile brzmiące?...

Lilavati — to imię córki sławnego matematyka hinduskiego z XII stulecia Bhâskary, zwanego Acâria, czyli mędrzec, a zarazem jest to tytuł pierwszej części jego wielkiego dzieła matematycznego Siddhânta, dedykowanego córce.

Lilavati to znaczy: urocza, czarująca! Taka zapewne była owa dziewczyna hinduska obdarzona niepospolitym talentem matematycznym; ale taka przede wszystkim jest sama MATEMATYKA.

Czyż więc nazwa nietrafna, nieuzasadniona? Lecz oto jeden jeszcze motyw obrania tego egzotycznego tytułu: jest nim mianowicie gorąca chęć złożenia hołdu wielkiemu narodowi matematyków, jakim byli i są nadal Hindusi. Nie każdemu wiadomo, że tzw. cyfry arabskie są właściwie pochodzenia hinduskiego. Aby zaś w jednym momencie móc odczuć i pojąć, czym dla postępu matematyki było wprowadzenie hinduskiego sposobu oznaczania liczb, wystarczy spróbować pomnożyć dwie tak niewielkie liczby: MDCXII przez CCLVIII. Ogromne trudności, jakie działaniu temu niegdyś towarzyszyły, poszły w niepamięć. A stało się tak dlatego, że Hindusi przed wiekami wynaleźli zero.

Książka niniejsza jest przeznaczona głównie dla młodzieży, ale i człowiek dojrzały, gdy ją weźmie do ręki, przekona się niewątpliwie, że niejedną w niej rzecz nową i ciekawą odnajdzie.

Zbyteczne chyba byłoby nadmieniać, że nie jest to książka, która by mogła być przeczytana jednym ciągiem, że ma ona służyć przez dłuższy czas i wielokrotnie za podręcznik dostarczający Czytelnikowi okazji do pożytecznej rozrywki w chwilach wolnych, spędzanych czy to samotnie, czy też w gronie przyjaciół i znajomych.

Szczególnie polecić pragnęlibyśmy tę książkę uwadze sfer nauczycielskich, a to z dwóch powodów. Przede wszystkim więc dlatego, iż jako zbiór najciekawszych anegdot, gier, zabaw, sztuk i figlów matematycznych może okazać się nieraz pomocą w urozmaiceniu szkolnych lekcji arytmetyki, algebry czy geometrii; a po wtóre dlatego, iż wszystkie podane tu gry i zabawy, oprócz innych zalet, mają tę bardzo ważną cechę dodatnią, że można je nader łatwo samemu sobie sprokurować używając najprostszych jedynie narzędzi oraz materiałów niekosztownych i nietrudnych do zdobycia, jak tektura, papier kolorowy, deszczułka albo drut.

Może więc byłoby dobrze, żeby w szkołach podstawowych i średnich uczniowie czy uczennice w czasie przeznaczonym na roboty ręczne mogli pod kierunkiem nauczyciela wykonać gry takie, jak *kameleon*, *piętnastka*, *wieża hanojska*, a nawet *domino*, w domu zaś bawiąc się w chwilach wolnych — ćwiczyć się z rodzeństwem i rówieśnikami w bystrości.

* * *

Pierwsza ta książka nie wyczerpuje oczywiście nie tylko wszystkich, ale nawet najciekawszych rozrywek matematycznych. Materiał jest tak ogromny i tak różnorodny, że ani się nie da w jednym zawrzeć tomie, ani ściśle ująć w jakiekolwiek systematyczne poddziały.

Kto więc w książce tej nie znajdzie wszystkiego, czego się spodziewał, niechaj sięgnie po tom następny, który ku czci drugiego wielkiego narodu matematyków nosi tytuł: *Śladami Pitagorasa.*

Inż. S. JELEŃSKI



I

ANEGDOTY MATEMATYCZNE I ZADANIA ANEGDOTYCZNE

UWAGI OGÓLNE

Anegdot matematycznych jest bardzo wiele, a ilość zadań anegdotycznych jest wprost nieograniczona. Czym więc kierować się należało przy ich wyborze? Głównie zasadą jak największego urozmaicenia.

Wśród przytoczonych tu zadań i anegdot znajdzie Czytelnik najróżniejsze typy zagadnień: zadania na podziały, rozstawienia, rozlewy, przeprawy, restytucje, manewry itd., itd.; zadania pochodzące z przeróżnych epok: sprzed tysięcy lat, sprzed setek lat i sprzed dziesiątków lat; zadania chińskie, hinduskie, greckie, arabskie, rosyjskie, francuskie itd.; zadania wielkich matematyków, jak Bhâskary, Leonarda z Pizy, Bacheta, Newtona, Lucasa i innych, oraz zadania nieznanych autorów przekazane tradycją. A już pod względem tematów każde niemal zadanie jest odmienne.

Wszystkie zadania są łatwe, bardzo łatwe, dostępne dla każdego, komu nieobce są początki arytmetyki, algebry i geometrii w zakresie elementarnym. Kto by zaś nawet i tych wiadomości nie miał świeżo w pamięci, z większości podanych tu zadań doskonale skorzystać potrafi, odświeżając właśnie w formie rozrywki zdobyte przed laty prawdy matematyczne.

W wielu zadaniach podane jest całkowite rozwiązanie, przy innych dana jest tylko odpowiedź, przy niektórych wreszcie nie ma odpowiedzi; są to zadania, których samodzielne rozwiązanie (analogiczne do wykazanych poprzednio) może przynieść Czytelnikowi nie tylko pożytek, ale i szczere zadowolenie.



1. Scheda Araba

Jest to jedno z najstarszych zadań, najprawdopodobniej pochodzenia autentycznie arabskiego, nieznanego autora.

Pewien Arab pozostawił w dziedzictwie swoim trzem synom do podziału stado wielbłądów, przy czym zaznaczył, że najstarszy ma otrzymać połowę, średni trzecią część, a najmłodszy dziewiątą część dziedzictwa. Okazało się, jednak, iż stado liczy 17 sztuk.

Podział był trudny; przeto spadkobiercy zwrócili się do kadiego [1]), znanego w całej okolicy ze swej mądrości. Ten wydał sąd następujący: należy dopożyczyć jednego wielbłąda i przystąpić do podziału mając wielbłądów 18. Bracia postąpili według rady sędziego. Wówczas starszemu w udziale przypadło 9 wielbłądów, średniemu 6, a najmłodszemu 2, pożyczonego zaś wielbłąda zwrócono jego właścicielowi i trzej bracia byli wysoce zadowoleni z mądrego wyroku kadiego, gdyż w rzeczywistości każdy z nich otrzymał więcej, niż ojciec wyznaczył, a mianowicie jeden o $\frac{1}{2}$ wielbłąda więcej, drugi o $\frac{1}{3}$, a trzeci o $\frac{1}{9}$ wielbłąda.

Powyższy ciekawy wynik wydaje się na pozór paradoksalny. Z sumy jednak tych części, na jakie ojciec kazał synom podzielić całą schedę $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, przekonamy się, że gdyby podział spadku został dokładnie wykonany według brzmienia testamentu, to $\frac{1}{18}$ spadku nie byłaby tym podziałem objęta. Stąd pochodzą owe „nadwyżki", które tak niespodzianie ku swej radości otrzymali spadkobiercy.

[1]) Kadi — sędzia.

2. Znaleziona sakiewka

J. Ignatjew w swym trzytomowym zbiorze rozrywek matematycznych pod tytułem *W carstwie smiekałki* przytacza podobne zadanie rosyjskie.

Działo się to w dawnej Rosji. Czterej wieśniacy: Bazyli, Mitrofan, Polikarp i Teodozy wracali z miasta i głośno narzekali, że nie udało im się nic zarobić.

— Dobrze by było — rzekł Bazyli — gdybym tak znalazł na drodze sakiewkę z pieniędzmi, ja bym dla siebie zatrzymał tylko trzecią część, a resztę, nawet wraz z sakiewką, oddałbym wam do podziału.

— A ja — powiedział Mitrofan — podzieliłbym na równe części.

— Mnie i piąta wystarczyłaby część — zapewnił Polikarp.

— A ja poprzestanę na szóstej części — dorzucił Teodozy. — Ale co długo o tym mówić! Kto i kiedy znalazł na drodze pieniądze?!

Naraz, o dziwo! widzą na gościńcu sakiewkę. Podnieśli ją i zdecydowali podzielić się znalezionymi pieniędzmi w taki sposób, jak każdy proponował, mianowicie Bazyli otrzyma trzecią część, Mitrofan — czwartą, Polikarp — piątą, a Teodozy — szóstą część znalezionych pieniędzy.

Otworzyli sakiewkę i przeliczyli jej zawartość. Okazało się, że jest w niej 8 banknotów, mianowicie: jeden trzyrublowy, a reszta — to były banknoty jedno-, pięcio- i dziesięciorublowe. Żaden z wieśniaków nie mógł otrzymać swej części przed zmianą banknotów na drobne. Postanowili tedy zwrócić się z prośbą o zmianę do pierwszej osoby, którą napotkają na drodze. Wtem mija ich jeździec. Zatrzymali go wieśniacy:

— Znaleźliśmy sakiewkę z pieniędzmi — mówią — i pieniądze chcemy tak a tak między sobą podzielić. Prosimy o zmianę rubla na drobne.

— Rubla wam nie zmienię, lecz dajcie mi sakiewkę z pieniędzmi: włożę tam swój papierek jednorublowy i ze wszystkich pieniędzy, które tam będą, wydam każdemu jego część, a dla siebie zatrzymam sakiewkę.

Wieśniacy z radością przystali na tę propozycję. Jeździec dołożył swego rubla, po czym pierwszemu wręczył $\frac{1}{3}$, drugiemu $\frac{1}{4}$, trzeciemu $\frac{1}{5}$, czwartemu $\frac{1}{6}$ wszystkich pieniędzy, a sakiewkę schował w zanadrze.

— Dziękuję wam bardzo, przyjaciele! I wy zadowoleni, i ja zadowolony jestem z podziału — powiedział na pożegnanie nieznajomy i wkrótce znikł im z oczu.



Ostatnie słowa jeźdźca zaniepokoiły nieco wieśniaków.

— Za co on nam tak dziękował?

— Chłopcy, ile mamy wszystkich papierków? — zapytał Mitrofan.

Zliczyli — było 8.

— A kto ma trzyrublówkę?

Nikt jej nie miał.

— A to nas nabrał! Obliczmy szybko, na ile on pokrzywdził każdego!

Naraz okrzyk zdziwienia...

— Nie, towarzysze, przecież ja dostałem więcej, niż mi się należało! — zawołał zdumiony Bazyli.

— I ja również! I ja — zawtórowali mu Polikarp i Teodozy.

— A i ja otrzymałem o 25 kopiejek[1]) więcej — powiedział Mitrofan.

— Jakże się to stać mogło? Wszystkim dał więcej, niż należało, a trzyrublówka znikła.

Ile pieniędzy znaleźli wieśniacy?

Czy jeździec ich oszukał?

Jakie banknoty wręczył każdemu?

Wieśniacy nie umieli prawidłowo dodawać ułamków. Rzeczywiście, dodajmy wszystkie części, na które wieśniacy chcieli podzielić znalezione pieniądze:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$

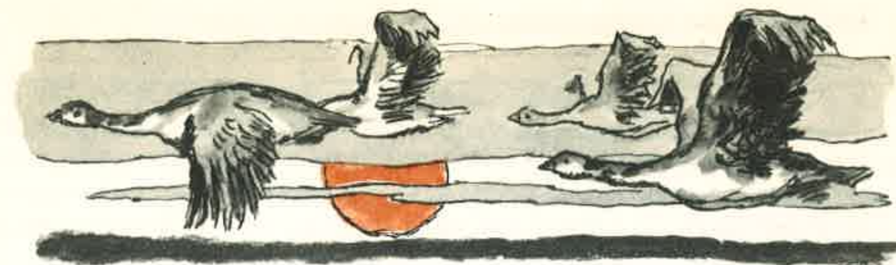
Z tego wynika, że chcieli oni rozdzielić pomiędzy siebie mniej niż znaleźli (znaleźli bowiem $\frac{60}{60}$). Znalezione pieniądze wraz z pieniędzmi jeźdźca zostały podzielone na 60 części; z tego $\frac{57}{60}$ otrzymali wieśniacy, a $\frac{3}{60}$, czyli $\frac{1}{20}$, zatrzymał dla siebie jeździec.

Wiemy, że jeździec przywłaszczył sobie trzyrublówkę. A więc $\frac{1}{20}$ wszystkich pieniędzy wynosiła 3 ruble, a wszystkich pieniędzy było 60 rubli. Mitrofan dostał $\frac{1}{4}$ tych pieniędzy, to znaczy 15 rub., lecz jeśliby jeździec nie był dołożył swych pieniędzy, to Mitrofan powinien był otrzymać o 25 kop. mniej, to jest 15 rub. — 25 kop. = 14 rub. 75 kop., i to była $\frac{1}{4}$ znalezionych pieniędzy. Z tego wnioskujemy, że znaleziono 59 rubli. Łącznie z pieniędzmi jeźdźca było 60 rubli. Nieznajomy dołożył był rubla, a zatrzymał dla siebie 3 ruble, a więc na przemyślnym podziale zarobił dwa ruble.

Jakie banknoty wieśniacy znaleźli w sakiewce? Pięć papierków po 10 rubli, jedną pięciorublówkę, jedną trzyrublówkę i jedną jednorublówkę. Bazyli otrzymał od jeźdźca 20 rubli: dwie dziesięciorublówki, Mitrofan 15 rubli: dziesięciorublówkę i pięciorublówkę, Polikarp 12 rubli: dziesięciorublówkę i dwie jednorublówki (jedną znalezioną, drugą od jeźdźca), Teodozy — ostatnią dziesięciorublówkę. A trzyrublówkę wraz z sakiewką zatrzymał dla siebie jeździec.

---

[1]) Rubel ma 100 kopiejek.



3. Jak gęś z bocianem rozwiązywały zadanie matematyczne

Leciało stado dzikich gęsi. Naprzeciw z trudem podfrunęła ku nim ze stawu gęś domowa i jęła wołać w gęsim zachwycie:

— Witaj, witaj, stugęśne stado mych dalekich krewnych!

Gąsior, prowodyr stada, odgęgnął:

— Nie, nasze stado nie ma stu gęsi! Gdyby nas było jeszcze raz tyle i połowę tego, i jeszcze ćwierć tego i ty na dodatek, to dopiero wówczas byłaby nas cała setka. No, a teraz, jeżeli nie masz nic lepszego do roboty, to oblicz, ile nas jest w stadzie.

Opadła gęś entuzjastka ciężko na wody stawu i zaczęła się zastanawiać, ile też mogło być tych gęsi w stadzie, które przeleciało ponad nią. Żartobliwie rzucone przez gąsiora pytanie nie dawało jej spokoju, nie umiała jednak nawet wziąć się do rozwiązania zagadki.

Naraz ujrzała na brzegu stawu bociana; laskonogi kroczył dostojnie, polując na żaby. Bocian cieszy się w królestwie ptasim sławą doskonałego matematyka; nieraz przecież całymi godzinami stoi nieruchomo na jednej nodze i rozmyśla — niezawodnie rozwiązuje zadania.

Uradowała się gęś, podpłynęła do bociana i opowiedziała mu o spotkaniu ze swymi krewnymi i o zagadce, jaką jej zadał gąsior, wreszcie z pokorą przyznała, że sama nie wie, jak przystąpić do jej rozwiązania.

— Hm, hm! — rzekł bocian. — Spróbujmy razem zadanie to rozwiązać. Tylko bądź uważna i staraj się mnie zrozumieć. Słyszysz?

— Postaram się!

— A więc, jak ci to powiedzieli? Gdyby dodać do spotkanych gęsi jeszcze tyle, potem jeszcze połowę tego i ćwierć tego, wreszcie ciebie, gąsko, to wypadłoby razem sto. Czy dobrze zapamiętałem?

— Dobrze, zupełnie dobrze — odpowiedziała gęś.

— Teraz uważaj — powiedział bocian — co ja ci narysuję na brzegu na piasku.

Bocian zgiął długą szyję i dziobem przeciągnął linię, obok takąż drugą, następnie połowę tej linii, potem ćwierć, wreszcie maleńką linijkę, prawie kropkę.

Rysunek tak się przedstawiał:



Gęś podpłynęła do samego brzegu, wyszła na piasek i kołysząc się z nogi na nogę zaczęła przyglądać się rysunkowi, lecz nic pojąć nie mogła.

— Rozumiesz? — zapytał bocian.

— Jeszcze nie! — ponuro odpowiedziała gęś.

— Oj, ty, ty! Otwórz szeroko oczy i słuchaj. To, co ci powiedział twój swojak, ja tu narysowałem. Gdyby do spotkanych przez ciebie gęsi dodać jeszcze takie samo stado i jeszcze pół stada, i jeszcze ćwierć stada, i jeszcze jedną gęś... Powtórz, ile miało być wówczas wszystkich gęsi?

— Sto!

— A bez ciebie ile by było?

— Dziewięćdziesiąt dziewięć.

— Dobrze! Usuńmy na naszym rysunku kropkę, która ciebie oznacza. Zostanie 99 gęsi.



Bocian postukał swym dziobem i na piasku pozostał taki rysunek:

— A teraz musisz sama trochę głowę połamać. Do ćwierci stada jeśli dodamy pół stada — ile będzie ćwierci?

Gęś zamyśliła się, uważnie popatrzyła na linie nakreślone na piasku i tak odrzekła: ,,Połowa i ćwierć — to to samo, co trzy ćwierci stada".

— Tak! Ale my mamy tutaj stado, jeszcze takie stado, pół stada i ćwierć stada — i dopiero to w sumie daje liczbę 99. Więc jeśli przetłumaczymy wszystko na ćwierci, to ile takich ćwierci będziemy mieli?

Gęś po pewnym wahaniu odpowiedziała: ,,Wszystkich ćwierci będzie jedenaście, a tych jedenaście ćwierci równa się 99 gęsiom".

— Robisz postępy — zauważył bocian. — Teraz powtórz mi, do jakiego doszliśmy rezultatu obliczeń.

— Ustaliliśmy — żwawo odpowiedziała gęś — że w jedenastu ćwierciach stada byłoby 99 gęsi.

— A więc ile gęsi będzie w jednej ćwierci?

Gęś szybko podzieliła 99 przez 11 i odpowiedziała: ,,W ćwierci stada będzie 9 gęsi".

— No, a ile w całym stadzie?

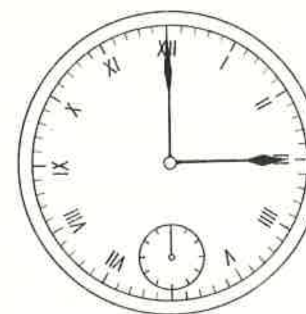
— W całym stadzie mamy cztery ćwierci. Eureka! — gęgnęła z całej siły — mam rozwiązanie zagadki: spotkałam stado liczące 36 gęsi!

I z wielkim podziwem i dumą rodową rozmyślać poczęła, kto bieglejszym jest matematykiem: czy bocian, który zdołał to zadanie rozwiązać, czy gąsior, który potrafił je tak zręcznie ułożyć...

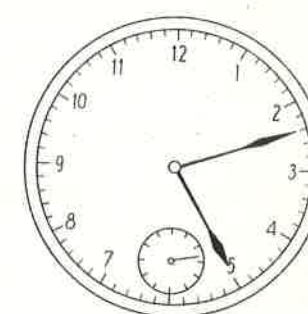
4. Dokładne nastawienie zegara

Nie mam chwilowo zegarka kieszonkowego, jest w naprawie u zegarmistrza, a ścienny mój zegar stanął. Udaję się więc do znajomego, u którego — jak wiem — zegary zawsze doskonale chodzą, czas pewien spędzam u niego i wróciwszy do domu nastawiam swój zegar zupełnie dokładnie. Jakim sposobem mogłem tego dokonać, jeśli poprzednio nie wiedziałem, ile czasu potrzeba, by przejść z mego mieszkania do mieszkania mego znajomego?

Zadanie sprowadza się do tego, by ustalić dokładnie godzinę po mym powrocie do domu. Otóż bezpośrednio przed wyjściem z domu nakręcam swój zegar, nastawiam go na którąkolwiek godzinę; godzinę tę oznaczam literą *a*. Natychmiast idę do znajomego i zaraz po przyjściu do niego notuję, która godzina jest na jego zegarze; oznaczam tę godzinę literą *b*.



Godzina *a*:
Nakręcam zegar i wychodzę z domu.

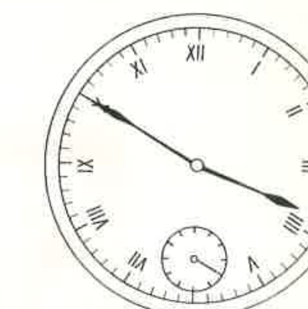


Godzina *b*:
Właśnie przyszedłem do znajomego.

Pogawędziwszy ze znajomym (... i napiwszy się czarnej kawy) ustalam tuż przed wyjściem, która jest godzina według jego zegara; niech to będzie godzina *c*. Wróciwszy do domu stwierdzam, którą godzinę wskazuje mój zegar nastawiony na chybił trafił; niech to będzie godzina *d*.

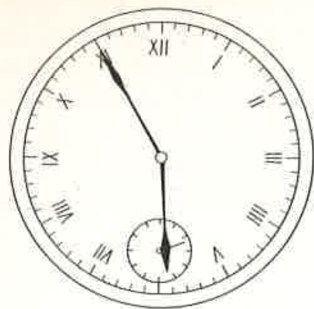


Godzina *c*:
Za chwilę pójdę do domu.



Godzina *d*:
Chwila powrotu do domu.

Wracając do domu miałem już przygotowany plan postępowania, więc w minutę po moim powrocie zegar mój wskazywał już prawidłową godzinę; była to godzina e.



Godzina e: W minutę po powrocie mój zegar już dobrze chodzi.

A oto obliczenia:

Różnica $d - a$ wskazuje, ile czasu byłem poza domem:

$d - a =$ godz. 3 min. 50 — godz. 3 min. 00 = 50 min.

Różnica $c - b$ wskazuje, ile czasu spędziłem u znajomego:

$c - b =$ godz. 5 min. 46 — godz. 5 min. 12 = 34 min.

Różnica $(d - a) - (c - b)$ wskazuje, ile czasu szedłem z mego domu do znajomego i z powrotem:

$(d - a) - (c - b) = 50$ min. $- 34$ min. $= 16$ min.

W obie strony starałem się iść krokiem równomiernym, więc mogę przyjąć, że na drogę powrotną zużyłem połowę tego czasu:

$$\frac{(d - a) - (c - b)}{2} = 8 \text{ min.}$$

Dodawszy tę połowę do godziny c otrzymam dokładną godzinę w chwili mego powrotu do domu:

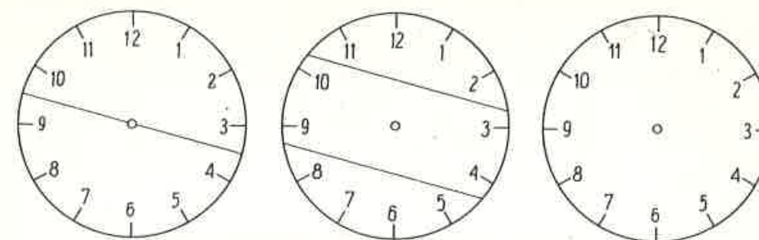
godz. 5 min. 46 + 8 min. = 5 godz. 54 min.

Dodałem jeszcze jedną minutę straconą na obliczenia — i oto mam dobry czas!



5. Dzielenie tarczy zegara

Na rysunku podajemy rozwiązanie dwóch pierwszych problemów. Trzecie rozwiązanie niechaj sam Czytelnik popróbuje wykonać.



A. Podzielić tarczę zegara linią na 2 części tak, żeby suma liczb w obu częściach była jednakowa. Ile suma ta wyniesie?

B. Podzielić tarczę dwiema liniami na 3 części z równymi sumami liczb.

C. Podzielić tarczę na 6 takich części.

6. Starożytny paradoks Zenona w nowej postaci

Punktualnie o północy lub w południe obie wskazówki zegara stoją ponad godziną 12. W godzinę później wskazówka godzinowa stanie na liczbie 1, a minutowa będzie nad liczbą 12. Gdy minutowa wskazówka dojdzie do liczby 1, godzinowa przesunie się naprzód o $\frac{5}{12}$ podziałki minutowej; gdy minutowa wskazówka dojdzie już do tego punktu (po upływie $5\frac{5}{12}$ min. od początku godziny), wskazówka godzinowa znów przesunie się dalej — i tak można ciągnąć w nieskończoność.

A więc właściwie wskazówka minutowa, „zasadniczo" i „teoretycznie" nie powinna by wyprzedzić ani nawet dogonić wskazówki godzinowej!

Jak ten paradoks wyjaśnić?

W owym wyścigu wskazówek, podobnie jak w wyścigu Achillesa z żółwiem, rzecz cała polega na tym, że kolejne przesunięcia wskazówki minutowej dają szereg geometryczny nieskończenie malejący, mianowicie

$$5 + 5 \cdot \tfrac{1}{12} + 5 \cdot \left(\tfrac{1}{12}\right)^2 + 5 \cdot \left(\tfrac{1}{12}\right)^3 + \dots$$

Pierwszy wyraz tego postępu jest $a = 5$, iloraz $q = \frac{1}{12}$. Suma szeregu geometrycznego nieskończenie malejącego wyraża się wzorem

$$S = \frac{a}{1 - q},$$

przeto

$$S = \frac{5}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{60}{11} = 5\tfrac{5}{11},$$

a więc o godzinie 1 minut $5\frac{5}{11}$ wskazówki zejdą się w tym dniu po raz pierwszy, licząc od południa albo od północy.

Ale oto jeszcze jedno drobne potwierdzenie tego wywodu:

Powiedzmy, że wskazówka minutowa dogoni wskazówkę godzinową w czasie x minut po godzinie 1. Droga, którą w tym czasie przejdzie wskazówka godzinowa, równa się oczywiście $\frac{x}{12}$. Kąt, który zakreśli „minutówka", jest 5 minut większy od kąta, który przejdzie „godzinniczka". Stąd

$$x - \frac{x}{12} = 5, \text{ więc } \quad x = 5 \cdot \frac{12}{11} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}.$$

7. Jeszcze kilka zadań zegarowych

A. Ile razy w ciągu 12 godzin wskazówka minutowa stanie ponad wskazówką godzinową?

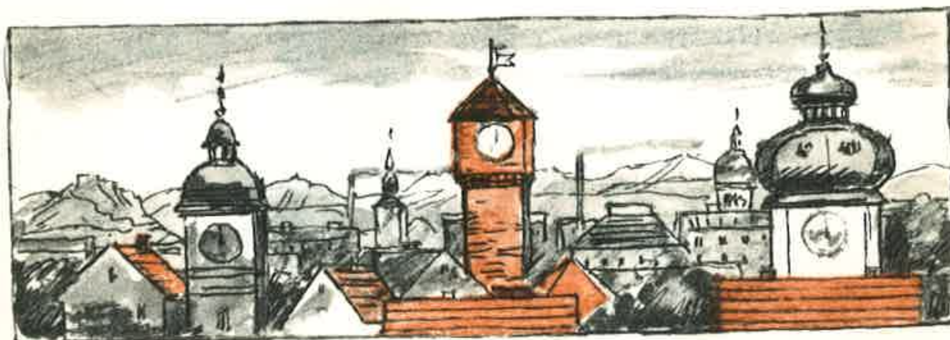
Dwanaście razy? Nie, tylko jedenaście! Pierwszy raz wskazówka minutowa dogoni godzinową o godzinie 1 minut $5\frac{5}{11}$. Za każdą też dalszą godziną będzie musiała wskazówka minutowa przebiec całą tarczę i $5\frac{5}{11}$ minuty. Drugie spotkanie nastąpi o godzinie 2 minut $10\frac{10}{11}$, trzecie o godzinie 3 minut $16\frac{4}{11}$ i tak dalej wreszcie jedenaste — o godzinie 11 minut $59\frac{11}{11}$, czyli ściśle o godzinie 12.

B. Jeśli zegar ścienny wybija godzinę VI w ciągu sześciu sekund, to ile czasu zużyje na wybicie godziny XII?

Każdy skłonny jest zrazu odpowiedzieć, że zużyje na to dwanaście sekund — zapominając, iż pomiędzy uderzeniem pierwszym a szóstym jest pięć pauz, gdy tymczasem pomiędzy szóstym a dwunastym uderzeniem takichże odstępów jest sześć. Zegar więc godzinę dwunastą bić będzie przez $13\frac{1}{5}$ sekundy. Zakładamy przy tym, że uderzenia zegara nie trwają, lecz są momentalne, są chwilą.

C. W pewnym dniu roku trzy zegary miejskie wybiły południe — o dziwo! — jednocześnie, ale tylko jeden z nich idzie jak należy, drugi śpieszy się o 10 minut dziennie, trzeci zaś spóźnia się codziennie o 12 minut. Po upływie ilu dni zegary te znów razem wybiją godzinę dwunastą?

Odpowiedzi prosimy szukać na stronicy 306.



D. Posiadam — powiada pewien matematyk do swego znajomego — zegar ścienny, który wybija tylko pełne godziny. Nakręcać go muszę, niestety, codziennie; czynię to po wybiciu godziny dwunastej w południe. W przeciągu doby oba ciężarki zegara opuszczają się jednakowo, każdy o 312 oczek łańcuszka.

Pewnego dnia podciągnąwszy ciężarki zegara wyszedłem z domu i po powrocie zauważyłem, że zegar wybił tyle razy, o ile oczek jeden ciężarek był wyżej od drugiego. Zastanowiło mnie czy na podstawie tej jedynie okoliczności mógłby ktoś dojść, o której mianowicie godzinie powróciłem. Czy jest to zadanie rozwiązalne?



Owszem. Ciężarek powodujący chód zegara opuszcza się na godzinę oczywiście o 312 : 24 = 13 oczek. A jak się zachowuje drugi ciężarek, który opada przy biciu zegara?

W ciągu dwunastu godzin zegar wybija godziny:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12.$$

Aby szybko obliczyć sumę dwunastu kolejnych liczb naturalnych zaczynając od jedności, należy ostatnią liczbę, więc liczbę 12, pomnożyć przez następną liczbę naturalną, czyli przez 13 i wynik mnożenia podzielić przez 2.

W naszym przypadku otrzymamy

$$\frac{12 \cdot (12 + 1)}{2} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$$

A więc w ciągu pół doby zegar wybije 78 razy, a w ciągu całej doby 156 razy. Ciężarek powodujący bicie zegara opuszcza się za każdym uderzeniem o 312 : 156 = 2 oczka łańcuszka.

Skoro więc w chwili powrotu właściciela wybił x razy, to od godziny dwunastej zegar wybił uderzeń

$$\frac{x(x + 1)}{2}$$

i w tym okresie ciężarek uruchamiający bicie zegara obniżył się o $x(x + 1)$ oczek łańcuszka, natomiast ciężarek poruszający wskazówki zegara obniżył się o $x \cdot 13$ oczek.

W myśl warunków zadania różnica między wyżej podanymi liczbami wynosiła właśnie x. Stąd równanie

$$13x - x(x + 1) = x$$

Liczba x nie jest zerem. Dzieląc wszystkie wyrazy naszego równania przez x otrzymujemy prostsze równanie:

$$13 - (x + 1) = 1,$$

z którego znajdujemy $x = 11$.

Powrót do domu nastąpił o godzinie 11 wieczorem.

E. Dwa zegary A i B bijąc równocześnie wybiły 19 razy. Jak określić godzinę, którą wskazywały, skoro wiadomo, że początek bicia godziny na zegarze A spóźnił się w stosunku do zegara B o 2 sekundy i że zegar A uderza co 3 sekundy, a zegar B co 4 sekundy?

Przypuśćmy, że po raz pierwszy zbiegnie się n-te uderzenie zegara A z n-tym uderzeniem zegara B.

Do tego momentu zegar A bił przez $(n - 1) \cdot 3$ sekundy, a zegar B bił przez $(n - 1) \cdot 4$ sekundy.

Otrzymujemy równanie

$$(n - 1) \cdot 4 - (n - 1) \cdot 3 = 2,$$

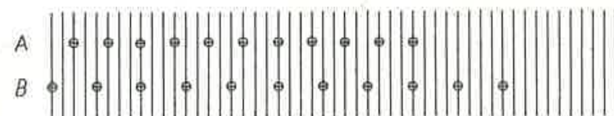
z którego znajdujemy $n = 3$.

A więc trzecie uderzenie zegara A zbiega się z trzecim uderzeniem zegara B, a przedtem słychać było 2 uderzenia zegara B i 2 nieco opóźniające się uderzenia zegara A. Jeśliby więc zegary biły godzinę *trzecią*, to razem słychać by było 5 uderzeń.

W ciągu następnych 12 sekund zegar A wybije 4 razy, a zegar B tylko 3 razy, przy czym w ciągu tych 12 sekund usłyszymy 3 osobne uderzenia zegara A i 2 osobne uderzenia zegara B oraz 1 uderzenie łączne; to *siódme* uderzenie zegara A zbiegnie się z *szóstym* uderzeniem zegara B. Razem w ciągu 12 sekund usłyszymy $3 + 2 + 1 = 6$ uderzeń, co z poprzednimi 5 uderzeniami daje 11 uderzeń.

Ale musimy „dojechać" do 19 uderzeń. Dalsze 12 sekund daje znowu 3 osobne uderzenia zegara A i 2 osobne uderzenia zegara B oraz 1 uderzenie łączne; wtedy zegar A będzie bił po raz *jedenasty*, a zegar B po raz *dziewiąty*. Razem z poprzednimi 11 uderzeniami usłyszymy 17 uderzeń, a potem jeszcze co 4 sekundy słyszeć będziemy 2 opóźnione uderzenia zegara B: dziesiąte i jedenaste. Była więc godzina *jedenasta*.

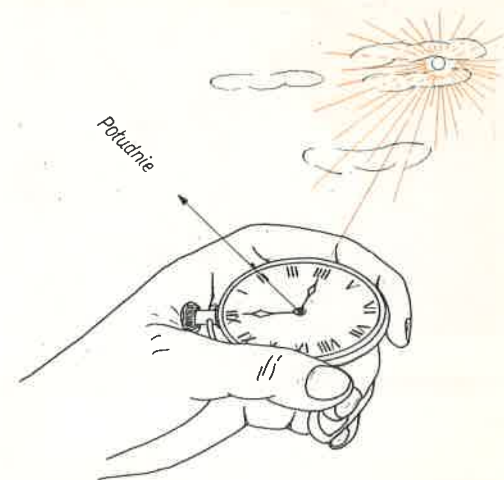
Oto rozkład uderzeń zegarów w czasie:



8. Określenie stron świata za pomocą kieszonkowego zegarka

Za pomocą kieszonkowego zegarka można określić w słoneczny dzień z dostateczną dla praktycznych celów dokładnością cztery strony świata.

Określenie kierunku polega na następującej manipulacji:



Trzymając w ręku kieszonkowy zegarek należy go obrócić w ten sposób, żeby wskazówka godzinowa była skierowana w stronę Słońca; wówczas kropka leżąca na obwodzie koła pośrodku między wskazówką godzinową a liczbą XII ustali nam kierunek południa.

Więc na przykład, jeśli wskazówka godzinowa wskazuje godzinę IV (jak na naszym rysunku), to skierowawszy wskazówkę tę ku Słońcu stwierdzimy, że środkowa kropka między wskazaną godziną IV a liczbą XII, czyli kropka oznaczająca godzinę II, określi kierunek południa. W przeciwnym kierunku będzie północ, na lewo — wschód, na prawo — zachód.

Poprzednią regułę można zmodyfikować w sposób następujący: należy znaleźć na obwodzie tarczy punkt środkowy między godziną, którą pokazuje mała (godzinowa) wskazówka, i kropką nad liczbą XII — i skierować tę środkową kropkę ku Słońcu; wówczas godzina XII wskaże kierunek południa.

Na przykład, jeśli zegarek wskazuje godzinę IV, to należy skierować ku Słońcu podziałkę znajdującą się nad godziną II. Wówczas linia przeprowadzona od środka zegarka ku liczbie XII będzie wskazywała kierunek południa.

Dla potwierdzenia powyższego wystarczy przypomnieć, że o godzinie XII w południe Słońce, wskazówka godzinowa i podziałka ponad liczbą XII leżą w jednej linii skierowanej na południe. Następnie i Słońce, i godzinowa wskazówka posuwają się w tym samym kierunku, lecz wskazówka godzinowa dokona pełnego obrotu w 12 godzin, a Słońce w 24 godziny, to jest w dwa razy dłuższym okresie czasu. Na tym właśnie opierają się powyższe reguły.

Należy dodać, że przed południem szukać trzeba punktu średniego pomiędzy wskazówką i godziną XII w kierunku obrotu wskazówek, po południu zaś — w kierunku przeciwnym.

Oczywiście musimy zdawać sobie sprawę, że znaleziony w ten sposób kierunek nie będzie dokładny. Przyczyną niedokładności jest to, że umieszczamy zegarek w płaszczyźnie poziomej, zamiast w płaszczyźnie równika niebieskiego. Ponadto nie bierzemy pod uwagę różnicy pomiędzy prawdziwym czasem słonecznym, a umownym czasem strefowym.



9. Ilość włosów na głowach ludzkich

Znany filozof XVII wieku Piotr Nicole w rozmowie z pewną paryżanką żartobliwie zapewnił, że może się z nią założyć i wykazać, iż w Paryżu przynajmniej dwie osoby mają tę samą ilość włosów, chociaż wskazać tych osób nie byłby w możności. Pani ta jednak z całą stanowczością odrzekła, że wówczas zostałaby dopiero przekonana, gdyby mogła u tych osób zliczyć włosy...

— Przypuszczam — rozpoczął swe rozumowanie ów filozof — że głowa z najpiękniejszym uwłosieniem nie ma więcej nad dwieście tysięcy włosów, a z najuboższym uwłosieniem — jeden włos! Jeżeli teraz przypuścimy, że z dwustu tysięcy osób każda ma inną ilość włosów, to musimy przyjąć, że każda z tych głów ma liczbę włosów zawierającą się w przedziale od jedności do dwustu tysięcy. Gdyby bowiem przypuścić, że chociaż dwie osoby spośród tych dwustu tysięcy mają jednakowe ilości włosów, zakład tym samym byłby już przeze mnie wygrany. A więc jeśli przyjmiemy, że z owych dwustu tysięcy osób każda ma inną ilość włosów, to dodając jeszcze jednego mieszkańca, którego uwłosienie głowy nie przekracza dwustu tysięcy włosów, z konieczności musimy stwierdzić, że liczba jego włosów — jakakolwiek jest — musi się znaleźć między jednością a dwustu tysiącami. Innymi słowy, liczba włosów dwustutysiącznej pierwszej głowy będzie się równała liczbie włosów posiadanych przez jedną z dwustu tysięcy osób. Jeśli zaś w Paryżu jest osiemset tysięcy głów, to łatwo przewidzieć, że będzie wśród nich wiele głów o jednakowej ilości włosów.

Podobno uparta niewiasta nie chciała — mimo wszystko — uznać się za przekonaną.

10. Jak sprzedając po pół jajka można sprzedać całe jajka

Sprzedawczyni spółdzielni spożywców opowiadała taką — zdawałoby się — niewiarygodną historię:

— Dzisiaj rano pierwsza klientka kupiła połowę wszystkich jajek i jeszcze pół jajka, druga kupiła połowę pozostałych jajek i znowu pół jajka, trzecia kupiła połowę pozostałych jajek i pół jajka — i tak samo było z czwartą, piątą i szóstą klientką. Wtedy zostało w koszu tylko jedno jajko.

— Opowiada pani niestworzone rzeczy! Komu by pani sprzedała pół jajka!

— Ale ja nikomu nie sprzedawałam pół jajka, tylko zawsze całe jajka!

Tu wtrącił się do rozmowy student mówiąc:

— Ja byłem siódmym klientem. Kupiłem połowę całego zapasu jajek i jeszcze pół jajka.

Na to sprzedawczyni:

— Pamiętam, tak było! Pan kupił ostatnie jajko!

Otóż cała tajemnica na tym polega, że za każdym razem w koszu była nieparzysta liczba jajek.

Przypuśćmy, że w pewnej chwili było w koszu $2n + 1$ jajek... Kupujący wziął połowę tego zapasu, czyli $n + \frac{1}{2}$ jajka, i jeszcze $\frac{1}{2}$ jajka, razem $n + 1$ jajek, a więc wziął całe jajka — bez dzielenia na połowy! W koszu zostawało n jajek. Zgodnie z opowieścią sprzedawczyni, musiała to być znowu liczba nieparzysta. A teraz zapytamy: ile jajek było w spółdzielni na początku sprzedaży?

Zadanie to rozwiążemy postępując od końca ku początkowi. Wiemy, że jeśli kupujący zastał w spółdzielni $2r + 1$ jajek, to kupił $r + 1$ jajek i zostawił r jajek. Ułóżmy tabelkę:

Kupujący	zostawił	kupił	zastał
siódmy	0	1	1
szósty	1	2	3
piąty	3	4	7
czwarty	7	8	15
trzeci	15	16	31
drugi	31	32	63
pierwszy	63	64	127

Na początku sprzedaży było 127 jajek.

Można by to zadanie uogólnić na n kupujących. Wtedy na początku sprzedaży trzeba wziąć $2^n - 1$ jajek.

Jeżeli na przykład $n = 7$, to na początku dnia trzeba wziąć $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$ jajek.

11. Tajemniczy pociąg

Wysłano na linię pociąg towarowy, który miał mniej niż sto wagonów. Na pierwszej stacji odczepiono czwartą część całego składu i jeszcze pół wagonu, a resztę pociągu posłano dalej. Na drugiej stacji znowu odczepiono czwartą część składu (już zmniejszonego na pierwszej stacji) i jeszcze pół wagonu, a resztę pociągu posłano dalej. Na trzeciej stacji odczepiono czwartą część składu (zmniejszonego na dwóch poprzednich stacjach) i jeszcze pół wagonu, a resztę pociągu posłano dalej.

Ile wagonów miał pociąg, gdy wyjeżdżał z trzeciej stacji?

Zdawałoby się, że zadanie jest nierozwiązalne, gdyż nie wiadomo, ile wagonów miał pierwotny pociąg. (Wiadomo tylko, że miał mniej niż sto wagonów). Ale pomimo to potrafimy rozwiązać zadanie.

Aby nie trzeba było odcinać „pół wagonu", trzeba założyć, że pierwotny pociąg miał $4n + 2$ wagony. Na pierwszej stacji odczepiono czwartą część składu, czyli $n + \frac{1}{2}$ wagonu, i jeszcze $\frac{1}{2}$ wagonu, razem $n + 1$ wagonów, a dalej pojechało $3n + 1$ wagonów.

Pierwotna liczba wagonów $4n + 2$ ma tę własność, że przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2. Aby liczba $3n + 1$ miała tę samą własność, musimy podstawić $n = 4n', + 3$. Wtedy $4n + 2 = 16n', + 14$, $3n + 1 = 12n', + 10$. A więc na drugą stację przyjechało $12n' + 10$ wagonów, odczepiono od pociągu czwartą część składu, czyli $3n' + 2\frac{1}{2}$ wagonu, i jeszcze $\frac{1}{2}$ wagonu, razem $3n' + 3$ wagony, a dalej pojechało $9n' + 7$ wagonów.

Jeżeli chcemy, żeby liczba $9n' + 7$ miała tę własność, że przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2, to musimy podstawić $n' = 4n'' + 3$. Wtedy $4n + 2 = 64n'' + 62$, $3n + 1 = 48n'' + 46$, $9n' + 7 = 36n'' + 34$. A więc na trzecią stację przyjechało $36'' + 34$ wagony; odczepiono czwartą część składu, czyli $9n'' + 8\frac{1}{2}$ wagonu, i jeszcze $\frac{1}{2}$ wagonu, razem $9n'' + 9$ wagonów, a dalej pojechało $27n'' + 25$ wagonów.

Teraz już jesteśmy bliscy rozwiązania zadania. Wiemy, że pierwszy pociąg miał $64n'' + 62$ wagony, ale wiemy też, że liczba wagonów była mniejsza od 100. Stąd wnioskujemy, że $n'' = 0$. Pierwotny pociąg składał się z 62 wagonów, z pierwszej stacji wyszedł pociąg składający się z 46 wagonów, z drugiej stacji — pociąg z 34 wagonów, z trzeciej stacji — pociąg z 25 wagonów.





12. Przekładanka jabłeczna

W siedmiu koszach znajduje się pewna ilość jabłek. Jeżeli z pierwszego kosza przeniesiemy do każdego z pozostałych koszów tyle, ile jest już w nim jabłek, i to samo powtórzymy kolejno z każdym następnym koszem, to ostatecznie we wszystkich koszach będzie po 128 jabłek. Czy można obliczyć (nie posiłkując się algebrą), ile jabłek było pierwotnie w każdym koszu?

Oczywiście! Trzeba tylko zacząć od końca...

Skoro po siódmym rozłożeniu w każdym koszu znalazło się 128 jabłek, to znaczy, iż w sześciu pierwszych koszach było przed tym rozłożeniem po 64 jabłka, a w siódmym koszu było ich $128 + 6 \cdot 64 = 512$. Tak „wstecznie" rozumując dalej, osiągniemy kolejno stany koszów przed szóstym, piątym, czwartym, trzecim, drugim i wreszcie przed pierwszym rozłożeniem.

128	128	128	128	128	128	128
64	64	64	64	64	64	512
32	32	32	32	32	480	256
16	16	16	16	464	240	128
8	8	8	456	232	120	64
4	4	452	228	116	60	32
2	450	226	114	58	30	16
449	225	113	57	29	15	8

Okazuje się, iż pierwotnie w koszach były następujące ilości jabłek: 449, 225, 113, 57, 29, 15, 8.

Warto zauważyć prawo tworzenia tych liczb:

$a_1 = 8$

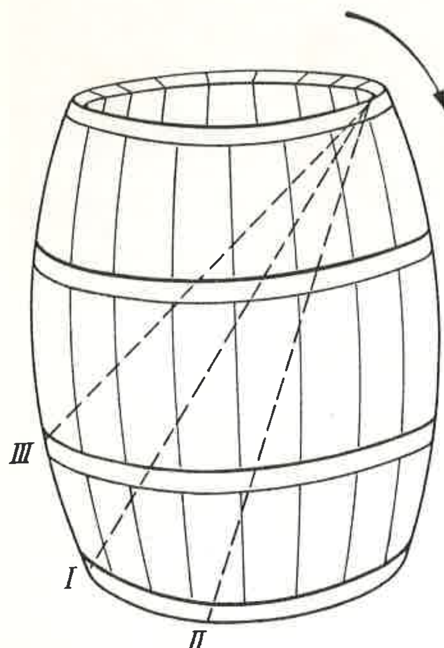
$a_2 = 2 \cdot a_1 - 1 = 15$

$a_3 = 2 \cdot a_2 - 1 = 29$

$a_4 = 2 \cdot a_3 - 1 = 57$

13. Ile wody jest w beczce

Dwóch ogrodników spierało się o ilość wody znajdującej się w beczce; chodziło o rozpuszczenie w niej soli potasowej. Jeden z nich twierdził, że w beczce jest wody więcej niż połowa, drugi obstawał, że jest mniej. Jak się przekonać, kto ma rację, nie używając ani patyka, ani sznurka, ani niczego, co by mogło służyć do pomiaru?



Oto wyjaśnienie:

Mamy przed sobą nie żart matematyczny, lecz prawdziwe zadanie geometryczne, chociaż rozwiązanie jest śmiesznie łatwe.

Jeśliby beczka była istotnie równo do połowy napełniona wodą, to nachyliwszy beczkę tak, żeby powierzchnia wody dosięgła jej brzegu, zobaczylibyśmy, że wyższy punkt dna znajduje się również na powierzchni wody (poziom I na rysunku). Wynika to z tego, że płaszczyzna przeprowadzona przez diametralnie przeciwległe punkty górnego i dolnego obwodu beczki dzieli ją na dwie równe części.

Jeśli wody jest mniej niż połowa beczki, to przy takim pochyleniu musi wystąpić z wody mniejszy lub większy odcinek dna (poziom II). Wreszcie jeśli wody jest więcej niż połowa beczki, to przy pochyleniu całe dno będzie pod wodą (poziom III).

W ten sposób bez jakichkolwiek pomiarów mamy dokładną odpowiedź.

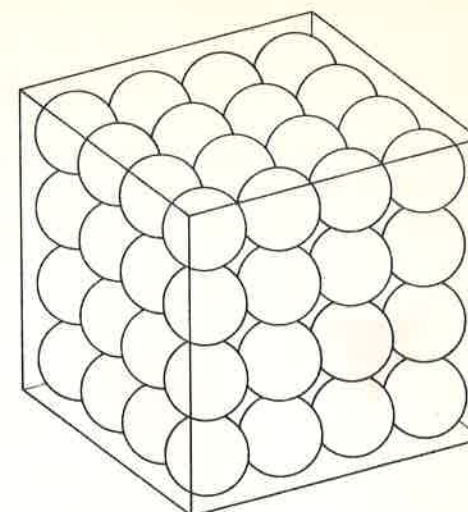
14. Skrzynia z kulkami

Fabryka wysłała skrzynię sześcienną ze stalowymi kulkami. Pusta skrzynia ważyła 2 kg, a waga skrzyni brutto razem z kulkami wynosiła 18 kg. W skrzyni były 64 jednakowe kulki ułożone w czterech warstwach: na dole skrzyni leżała warstwa z czterech rzędów po cztery kulki, na niej druga taka sama warstwa, wyżej trzecia, wreszcie warstwa czwarta.

W drugiej takiej samej skrzyni było 1000 kulek ułożonych w dziesięciu warstwach, a w każdej warstwie było dziesięć rzędów po dziesięć kulek w rzędzie.

Ile ważyła ta skrzynia brutto?

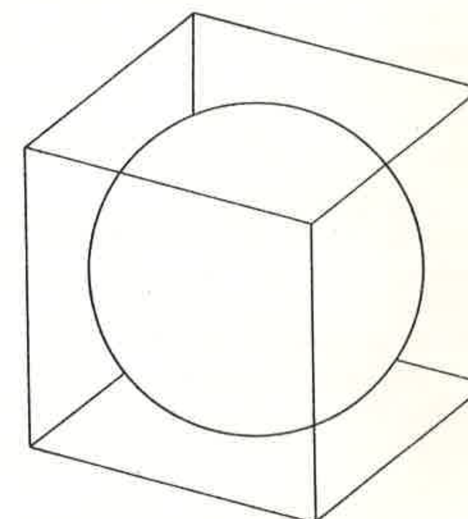
Która skrzynia ważyła więcej?



Kulki w pierwszej skrzyni ważyły netto 16 kg, a ponieważ kulek było 64, więc każda kulka ważyła 0,25 kg.

Zastanówmy się nad tym, ile ważyłaby jedna wielka kula, która dotykałaby wszystkich sześciu ścian skrzyni.

Kula taka miałaby średnicę 4 razy większą niż którakolwiek z 64 kulek przysłanych w pierwszej skrzyni. Ciężar tej kuli byłby $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ razy większy niż ciężar każdej z 64 kulek przysłanych w pierwszej skrzyni, a więc jedna wielka kula ważyłaby właśnie tyle, co 64 kulki przysłane w pierwszej skrzyni, czyli 16 kg.

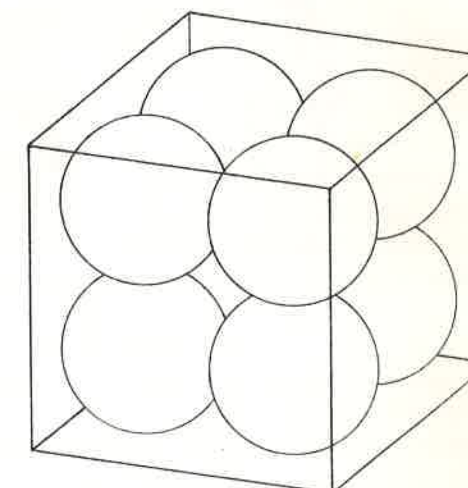


Jeżeli teraz weźmiemy kulki o średnicy 2 razy mniejszej niż średnica wielkiej kuli, to w skrzyni zmieści się $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ kul, łączny zaś ciężar będzie taki, jaki ma wielka kula!

Gdybyśmy wzięli kule o średnicy 3 razy mniejszej niż średnica wielkiej kuli, to kul byłoby $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, łączny zaś ciężar zostałby ten sam.

Teraz możemy odpowiedzieć na pytania, ile ważyła skrzynia z tysiącem kulek:

16 kg wagi netto,
a 18 kg wagi brutto.



Na zakończenie niechaj Czytelnik obliczy, ile ważyłaby taka skrzynia, gdyby była napełniona stalowym śrutem ułożonym równymi warstwami!

15. Gorzkie lekarstwo

Mały był chory. Lekarz przepisał lekarstwo i kazał dawać choremu od 15 do 20 gramów lekarstwa.



Matka wzięła kieliszek w kształcie stożka. W kieliszku tym mieściło się równo 20 gramów lekarstwa. Ale lekarstwo było gorzkie. Synek upierał się, że wypije tylko połowę lekarstwa: „O, dotąd!" — i pokazał paznokciem miejsce w połowie wysokości płynu w kieliszku.

Matka przez pewien czas oponowała, ale w końcu ustąpiła i synek wypił „połowę" lekarstwa.

A cóż lekarz na to powiedział?

— No, to i dobrze! Ta reszta jest na wysokość 2 razy mniejsza od całego kieliszka, ale na objętość jest 8 razy mniejsza. Mały zostawił 2,5 grama lekarstwa, a wypił 17,5 grama. Będzie zdrów!

16. Rozstawienie żołnierzy na warcie

Na kwadratowe podwórze zbrojowni wszedł porucznik z oddziałem żołnierzy w celu rozstawienia warty. Postawił wzdłuż każdej ściany 4 żołnierzy i oddalił się. Po chwili przybył kapitan i uważając, że warta nie jest dostateczna, umieścił wzdłuż ściany 5 żołnierzy. Wreszcie na podwórzu zbrojowni zjawił się major i wzdłuż każdej ściany umieścił 6 żołnierzy.

Jakie było rozstawienie żołnierzy w pierwszym, drugim, i trzecim przypadku, jeśli wszyscy trzej oficerowie rozporządzali tym samym oddziałem?

Jak widzicie — rozwiązanie nietrudne.



1	2	1
2		2
1	2	1



2	1	2
1		1
2	1	2



3		3
3		3

17. Klucze do walizek

Do Powszechnego Domu Towarowego, popularnie zwanego „pedetem", przysłano 10 walizek, a w kopercie załączono 10 kluczy, przy czym powiadomiono, że każdy klucz otwiera tylko jedną walizkę i że do każdej walizki można dobrać odpowiedni klucz.



Pracownik, który odbierał te walizki, westchnął: — A co to będę miał kramu z dobieraniem kluczy! Znam ja złośliwość martwych przedmiotów! Gdy zacznę dobierać klucz do pierwszej walizki, to właśnie tak wypadnie, że dopiero dziesiąty klucz będzie pasował. Dziesięć prób dla jednej walizki, a dla dziesięciu walizek aż sto prób!

Koleżanka, która w swym gospodarstwie domowym nabrała wielkiej wprawy w operowaniu kluczami, rzekła:

— Nie jest tak źle! To tylko przy pierwszej walizce grozi wam dziesięć prób. Przy drugiej walizce będziecie mieli do wypróbowania tylko dziewięć kluczy i tak ilość kluczy będzie wciąż malała.

— No, to policzmy, ile trzeba będzie wykonać prób:

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$$

a więc grozi mi nie więcej niż 55 prób!

W tym momencie kolega-racjonalizator doradza:

— Przede wszystkim nie przebierajcie kluczy jeden po drugim próbując je dopasować do jednej walizy, ale weźcie którykolwiek klucz i próbujcie nim otwierać kolejno walizki jedną po drugiej. Tak będzie prędzej, a i klucze nie będą się myliły. A po drugie, już przy pierwszym kluczu grozi wam nie dziesięć, tylko co najwyżej dziewięć prób, jeśli bowiem dziewięć prób zawiedzie, to śmiało przywiązujcie klucz do dziesiątej walizki. Przy drugim kluczu grozi wam osiem prób, przy trzecim — siedem prób, ..., przy dziewiątym — jedna próba, a dla dziesiątego klucza zostanie już tylko jedna walizka i nie trzeba będzie próbować!

— No, to razem będzie co najwyżej 45 prób!

— Tak, ale tak będzie w najgorszym wypadku — wtedy mianowicie, kiedy każdy klucz będzie pasował dopiero do ostatniej walizki. Prawdopodobnie jednak łączna ilość potrzebnych prób stanowić będzie połowę maksymalnej, to znaczy że wystarczą 22 lub 23 próby.

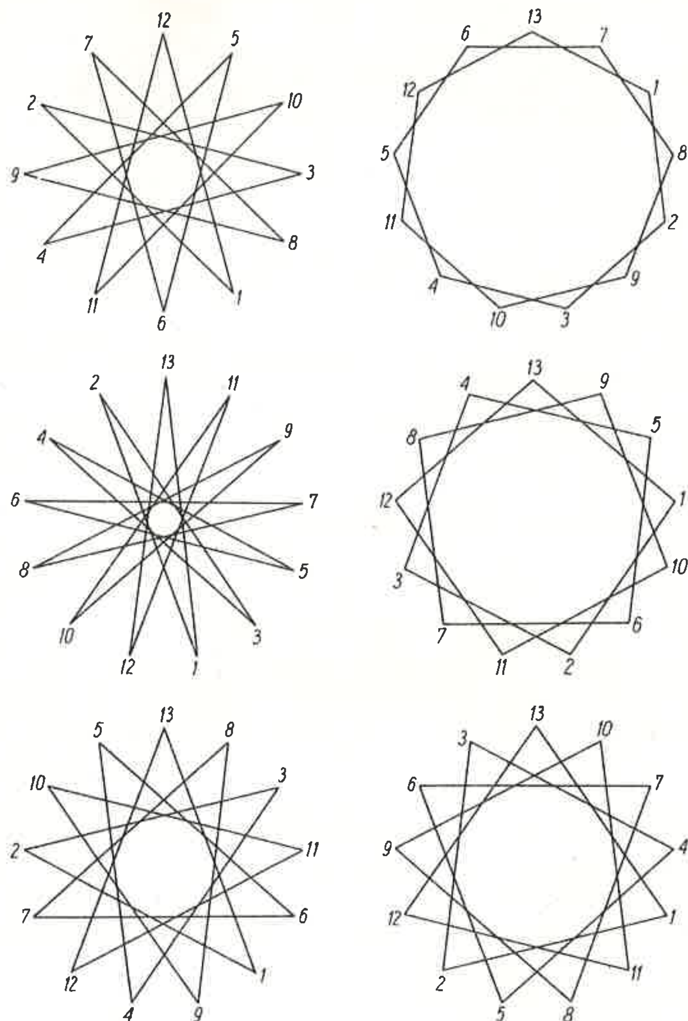
18. Jak rzucać piłkę w gronie dwunastu osób

Dwanaście dziewcząt stanęło kołem i poczęło bawić się rzucaniem piłki. Piłkę przerzucano dookoła w lewo, potem w prawo, ale to było mało zabawne.

— Rzucajmy co druga — zaproponowała któraś — będzie trudniej złapać...

— Ależ jest nas dwanaście i w takim razie będzie się bawiła piłką tylko połowa obecnych — zaprotestowała żywo Hanka, która w kombinacjach liczbowych była tak prawie biegła, jak sama Lilavati...

— No, to co trzecia!



— Jeszcze gorzej: będą się bawiły tylko cztery, a reszta będzie na nie tylko patrzeć... Jeśli chcecie, byśmy się wszystkie bawiły, musimy piłkę przerzucać co piąta dziewczynka. Innej kombinacji nie ma.

— Dlaczego? dlaczego? — wołano zewsząd. — A co siódma?

— To będzie to samo, tylko w odwrotnym kierunku.

— A co jedenasta?

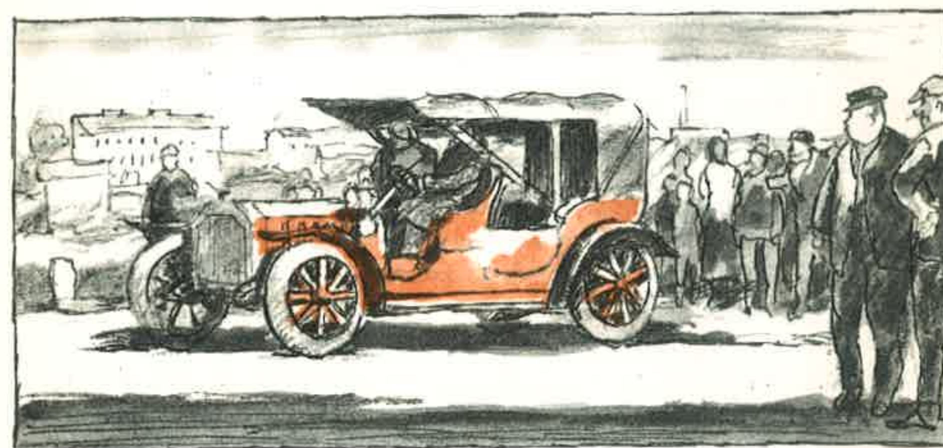
— Co jedenasta? Tak już eśmy się bawiły...

Nie wszystkie chciały wierzyć. Trzeba się było przekonać na rysunku, że jednak Hanka miała rację (rysunek lewy górny).

Gdyby do zabawy stanęło 13 dziewcząt, to mogłyby rzucać piłką co druga lub co trzecia, co czwarta, co piąta, co szósta. A gdyby rzucały co siódma, to zdawałoby się, że piłka obiega w przeciwnym kierunku.

19. Samochody i samolot

Między Warszawą a Poznaniem odległość wynosi 300 kilometrów. W tym samym dniu, w tej samej godzinie, minucie i sekundzie wyjeżdżają z obu miast ku sobie na spotkanie dwaj automobiliści i „pędzą" bez zatrzymania się z prędkością 50 kilometrów na godzinę, a równocześnie z nimi wylatuje z Warszawy samolot lecący 100 kilometrów na godzinę [1]). Samolot wyprzedziwszy automobilistę jadącego z Warszawy leci na spotkanie drugiego, który wyjechał z Poznania. Spotkawszy go zawraca natychmiast i leci ku pierwszemu, doleciawszy doń znów zawraca i zmierza ku drugiemu — i tak powtarza swój lot naprzód i wstecz tak długo, aż się automobiliści spotkają. Ile kilometrów przeleci samolot?



Rozwiązujący to zadanie gubią się zazwyczaj w bardzo skomplikowanych obliczeniach: gdzie spotkał samolot auto jadące z Poznania, gdzie następnie spotkał to auto, które był wyprzedził, i tak dalej...

Tymczasem zadanie rozwiązuje się niesłychanie łatwo: samochody spotkały się po trzech godzinach, a więc samolot latał bez przerwy 3 godziny i przeleciał 300 kilometrów.

[1]) Było to w czasach takich samochodów, jak na ilustracji.



20. Testament maharadży

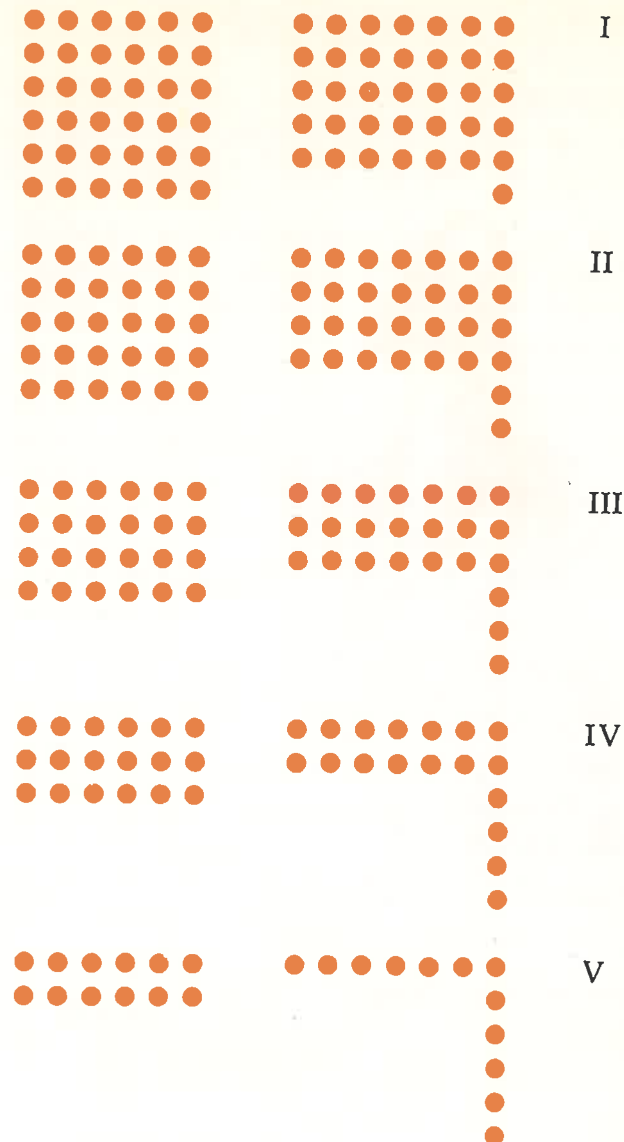
Pewien hinduski maharadża pozostawił swym sześciu synom w spadku sporą ilość wielkich diamentów jednakowej wartości, przy czym rozporządził, że pierwszy z synów weźmie jeden diament i $\frac{1}{7}$ pozostałych, drugi — dwa diamenty i $\frac{1}{7}$ pozostałych i tak dalej. Po dokonanym podziale okazało się, że każdy z synów otrzymał tę samą ilość diamentów. Ile było wszystkich diamentów?

Rozwiązanie algebraiczne nie sprawia najmniejszej trudności. Sposób podany poniżej jest jednak przystępniejszy, a przy tym ciekawszy.

Z tekstu zadania łatwo wysnuć, że każdy z synów musiał otrzymać co najmniej po 6 diamentów.

Przedstawmy diamenty na stronicy sąsiedniej i zacznijmy od kwadratu, który ma 6 rzędów po 6 diamentów w rzędzie. Przesuńmy jeden rząd diamentów tak, jak pokazuje figura I. Po oddaniu najstarszemu bratu jednego diamentu wystającego po prawej stronie przesuniętego rzędu trzeba będzie mu oddać dalsze 5 diamentów ostatniego rzędu jako siódmą część pozostałej ilości diamentów.

Pierwszy syn otrzymał 6 diamentów, a zostanie ich 30. Powtarzając podobne manipulacje na prostokącie z 30 krążków otrzymamy figurę II. Gdy z ostatniego rzędu usuniemy dwa wystające diamenty, będziemy mieli jeszcze cztery diamenty, które stanowić będą siódmą część pozostałych diamentów. W ten sposób postępując dalej wykażemy, że każdy z sześciu synów otrzyma 6 diamentów.



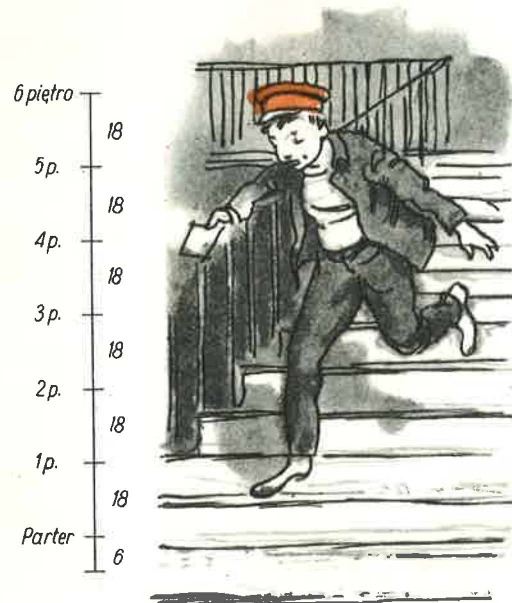
Przytoczony przez nas sposób rozwiązania ma tę słabą stronę, że zaczyna się właściwie od podania wyniku i tym się kończy: wybiera się kwadrat złożony z 36 krążków dlatego, że wiemy, iż tyle ich być powinno. Tymczasem rozwiązanie algebraiczne postępuje w sposób zwykły: od wiadomych do niewiadomego. W każdym razie i powyższa procedura, mimo że stanowi niejako rozwiązanie sztuczne, jest ciekawa.

Rozumowanie w niczym nie ulegnie zmianie, jeśli zamiast $\frac{1}{7}$ weźmiemy inny ułamek, mianowicie jakieś $\frac{1}{n}$. Liczba synów wówczas powinna być $n - 1$, a liczba diamentów $(n - 1)^2$.

21. Bieganina po schodach

Pewna spółdzielnia ma odbiorców na parterze i na każdym piętrze sześciopiętrowego domu. Schody pomiędzy poszczególnymi piętrami mają po 18 stopni, a przed drzwiami wejściowymi znajduje się jeszcze podmurek z 6 stopni.

Któregoś dnia posłaniec musiał dostarczyć każdemu z klientów jednakowej wielkości paczki, przy czym za każdym razem mógł unieść tylko jedną paczkę. Po ilu stopniach będzie musiał wejść i zejść, by dostarczyć wszystkie paczki do miejsca ich przeznaczenia?



Aby zanieść pierwszą paczkę na parter, posłaniec wejdzie 6 stopni; aby odnieść drugą na I piętro, 6 + 18 stopni; aby odnieść trzecią na II piętro, 6 + 2 · 18 stopni; ... wreszcie aby odnieść siódmą paczkę na VI piętro, 6 + 6 · 18 = = 114 stopni.

Posłaniec wchodzi więc na taką ilość stopni, jaką będzie suma postępu arytmetycznego złożonego z 7 wyrazów, którego pierwszy wyraz jest 6, a różnica 18.

Sumę tę obliczamy według wzoru

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

gdzie n oznacza liczbę wyrazów postępu, a_1 — pierwszy wyraz postępu, a_n — ostatni wyraz.

Otrzymamy więc:

$$S = \frac{6 + 114}{2} \cdot 7 = 420 \text{ stopni.}$$

Schodzić będzie tę samą ilość stopni, czyli ogółem będzie musiał przebyć 2 · 420 = 840 stopni. Wliczyliśmy do tej liczby stopnie, z których posłaniec musiał zejść po zaniesieniu ostatniej paczki na VI piętro.

Jak to nieraz bywa w brzmieniu zadań rozrywkowych, może tu zajść pewna dwoistość interpretacji. Oto gdy posłaniec „dostarczył paczki do miejsca ich przeznaczenia", sam znalazł się na wysokości VI piętra..., a więc — ściśle mówiąc — w tym momencie wszedł i zeszedł 840 — 114 = 726 stopni. Gdy więc ktoś obliczy, że posłaniec musiał przejść 840 stopni, można temu zaprzeczyć „w imię ścisłości".

22. Nitka jedwabiu

Pewien oryginał zrobił poniższe obliczenie oparte na danych, które — przyznać należy — nie są łatwe do sprawdzenia:

Miasto Lyon, słynne ze swych fabryk tkanin jedwabnych, zużywa rocznie milion kilogramów jedwabiu. Jeden gram jedwabiu przędą cztery jedwabniki, to znaczy, że dla jedwabniczego przemysłu Lyonu potrzebna jest praca 4 miliardów jedwabników. Jeden jedwabnik przędzie nitkę długości 500 metrów, więc 4 miliardy tych małych pracowników dadzą nitkę długości 2000 miliardów metrów, to jest 2 miliardy kilometrów.

Długość tej nitki jest 13 razy większa od odległości, jaka dzieli Ziemię od Słońca, a 5200 razy większa niż odległość Ziemi od Księżyca. Biegnąc wzdłuż równika nitka ta otoczyłaby nasz glob ziemski 50 000 razy, Księżyc zaś otoczyłaby 82 000 razy.

23. Zgubiony woreczek z pieniędzmi

Pewna osoba zgubiła woreczek pełen dwudziestogroszówek. Nie wiedziała dokładnie, ile monet zawierał woreczek; pamiętała jedynie, że gdy przeliczyła monety po 2, po 3 i po 5, pozostawała jej zawsze jedna moneta, gdy zaś przeliczyła je po 7, nic jej nie zostawało. Ile pieniędzy było w woreczku?

Według powyższych danych liczba oznaczająca ilość zgubionych monet jest wielokrotnością liczby 7, zmniejszona zaś o jedność, staje się wielokrotnością liczb 2, 3 i 5. Ale że liczby te są liczbami pierwszymi, więc liczba monet zgubionych musi być wielokrotnością iloczynu 2 · 3 · 5 = 30.

Należy przeto pomiędzy wielokrotnościami liczby 30 wybrać liczbę, która by, zwiększona o jedynkę, dzieliła się przez 7. Wymaganiom tym odpowiada liczba 90. A więc monet było 91, to znaczy zgubiono 18 zł 20 gr.

Oprócz liczby 91 warunkom zadania odpowiadają liczby: 91 + 210 = = 301, 301 + 210 = 511, 511 + 210 = 721 itd., ale już 301 monet dwudziestogroszowych ważyłoby 903 gramy, więc nieco za dużo jak na woreczek z pieniędzmi...



Przytaczamy jeszcze jedno podobne zadanie, aby Czytelnik mógł je samodzielnie rozwiązać:

W koszyku były jajka. Liczono je różnymi sposobami: to po 2, to po 3, to po 4, to po 5, to po 6, i zawsze zostawało 1 jajko. A kiedy liczono po 7 jajek, wtedy nic nie zostawało.

Ile jajek było w koszyku?

(Jest to bardzo dawne zadanie, przekazywane przez wiele pokoleń).



24. Wędrowcy i pierogi

Trzej wędrowcy, zdrożeni i głodni, przyszli do schroniska turystycznego, by wypocząć i coś przekąsić. Wędrowcy zamówili pierogi i poprosili o przyniesienie ich do pokoju, w którym będą odpoczywali. Czekając na owe pierogi usnęli. Gdy pierogi były już ugotowane, przyniesiono je do pokoju i postawiono na stole, nie budząc śpiących.

Gdy po przebudzeniu się jeden z turystów spostrzegł pierogi, przeliczył je, zjadł trzecią część i położył się spać na dobre.

Następnie obudził się drugi turysta, przeliczył pierogi, zjadł trzecią część i poszedł spać.

Wreszcie zbudził się trzeci turysta i postąpił tak samo.

Zostało 8 pierogów. Jak obliczyć, ile pierogów przyniesiono do pokoju? Kto ma prawo do pozostałych pierogów, jeżeli podział ma być sprawiedliwy?

Otóż trzeci turysta zostawił towarzyszom 8 pierogów, tj. każdemu po 4 sztuki, a więc sam zjadł 4 pierogi; stąd wniosek, że po przebudzeniu się zastał 12 pierogów.

Wiemy, że drugi turysta zostawił 12 pierogów, po 6 na każdego z pozostałych towarzyszy, a sam zjadł również 6 pierogów; stąd wniosek, że po przebudzeniu się zastał 18 pierogów.

Teraz łatwo ustalić, że jeżeli pierwszy turysta zostawił dla dwóch towarzyszy 18 pierogów, po 9 dla każdego, to i sam zjadł 9 pierogów, a więc pierwotnie było 27 pierogów.

Jak podzielić pozostałe 8 pierogów? Rzecz jasna, że pierwszy turysta zjadł już swoją porcję: 9 pierogów. Drugi turysta zjadł 6 pierogów, zatem należą mu się jeszcze 3 pierogi, a trzeci turysta zjadł 4 pierogi, należy mu się przeto 5 pierogów. Ponieważ pierwszy turysta zjadł całą swoją część, więc pozostałymi na półmisku 8 pierogami podzielą się już tylko jego towarzysze, mianowicie drugi turysta weźmie 3, a trzeci 5 sztuk.

25. Przeformowanie pociągów

Stacja kolejowa miała wysłać 11 pociągów, po 35 węglarek w każdym pociągu. Aby zwolnić kilka lokomotyw do innej pracy, maszyniści pozostałych lokomotyw polecili doczepić do każdego pociągu tyle razy po 5 wagonów, ile lokomotyw odeszło do innej pracy. W ten sposób wszystkie węglarki zostały zabrane.

Ile lokomotyw zwolniono do innej pracy?

Węglarek było $11 \cdot 35 = 385$. Liczbę 385 trzeba w inny sposób rozłożyć na czynniki, mianowicie tak, żeby jednym czynnikiem była liczba n mniejsza od 11, a drugim czynnikiem była liczba $35 + n \cdot 5$.

Rozłóżmy liczbę 385 na czynniki pierwsze:

$$385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$$

i wypiszmy wszystkie podzielniki tej liczby w porządku rosnącym:

$$1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 35,\ 55,\ 77,\ 385$$

Z podzielników tych można utworzyć następujące pary dające w iloczynie liczbę 385:

$$1 \cdot 385 = 5 \cdot 77 = 7 \cdot 55 = 11 \cdot 35$$

Zamiast 11 pociągów po 35 wagonów można było posłać 7 pociągów po 55 wagonów. Zwolniłoby to 4 lokomotywy. Do każdego pociągu trzeba byłoby doczepić 4 razy po 5 wagonów — co odpowiada warunkom zadania.

Można też rozwiązać to zadanie za pomocą równania.

Niechaj x oznacza liczbę lokomotyw zwolnionych do innej pracy. Zostanie $11 - x$ lokomotyw i każda z tych lokomotyw będzie musiała zabrać $35 + x \cdot 5$ wagonów. Z tego otrzymujemy równanie

$$(11 - x)(35 + x \cdot 5) = 385$$

Po przekształceniach algebraicznych będziemy mieli równanie

$$20x - 5x^2 = 0,$$

skąd ostatecznie

$$x(4 - x) = 0.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $x = 0$ (tak było w pierwotnym planie, kiedy wszystkie lokomotywy miały pojechać z węglarkami) lub $x = 4$ (to znaczy zwolniono 4 lokomotywy).

26. Trzy naczynia z wodą

Były trzy jednakowe beczułki, a w nich znajdowały się różne ilości wody. Z pierwszej beczułki przelano do drugiej i do trzeciej beczułki tyle wody, ile w każdej z nich przedtem było. Potem z drugiej beczułki przelano do trzeciej i do pierwszej beczułki tyle wody, że ilość wody w każdej z nich

została podwojona. Wreszcie z trzeciej beczułki przelano do pierwszej i do drugiej beczułki tyle wody, ile w każdej z nich było, a wtedy okazało się, że w każdej z beczułek było po 24 kwarty wody. W czasie przelewania raz się tylko zdarzyło, że jedna z beczułek była napełniona po brzegi.

Trzeba znaleźć pojemność beczułek i obliczyć, ile kwart wody było pierwotnie w każdej beczułce.

Rozwiążemy zadanie „od końca".

Po trzecim przelewaniu liczby kwart wody w poszczególnych beczułkach były następujące:

I — 24, II — 24, III — 24.

Przed trzecim przelewaniem był taki układ:

I — 12, II — 12, III — 48.

Przed drugim przelewaniem:

I — 6, II — 42, III — 24.

Przed pierwszym przelewaniem:

I — 39, II — 21, III — 12.

A więc na początku było 39 kwart wody w pierwszej beczułce, 21 kwart w drugiej i 12 kwart w trzeciej.

Największa ilość wody, jaka była w którejkolwiek beczułce, wynosiła 48 kwart. Wtedy beczułka była napełniona po brzegi, a ponieważ beczułki były jednakowe, więc miały po 48 kwart pojemności.

Można by rozwiązać to zadanie przy pomocy równań.

	Liczba kwart wody w beczce		
	I	II	III
Stan pierwotny	x	y	z
Po I przelewaniu	$x-y-z$	$2y$	$2z$
Po II przelewaniu	$2x-2y-2z$	$3y-z-x$	$4z$
Po III przelewaniu	$4x-4y-4z$	$6y-2z-2x$	$7z-x-y$

$$\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 24 \\ 6y - 2z - 2x = 24 \\ 7z - x - y = 24 \end{cases}$$

Dodając te równania otrzymujemy

$$x + y + z = 72$$

Z pierwszego równania mamy $x - y - z = 6$. Dodając $x + y + z = 72$ otrzymujemy $2x = 78$, skąd $x = 39$.

Z drugiego równania mamy $3y - z - x = 12$. Dodając $x + y + z = 72$ otrzymujemy $4y = 84$, skąd $y = 21$.

Z trzeciego równania mamy $7z - x - y = 24$. Dodając $x + y + z = 72$ otrzymujemy $8z = 96$, skąd $z = 12$.

27. Grzybobranie

Dziadek z czterema swoimi wnukami wyruszył do lasu po grzyby. W lesie każdy na swoją rękę poszedł na poszukiwanie. Po pół godzinie dziadek siadł pod drzewem, aby wypocząć; przeliczył zebrane grzyby i okazało się, że zebrał ich 45. Wnet nadbiegli wnuczkowie — wszyscy z pustymi rękami; żaden nie znalazł ani jednego grzyba.

— Dziaduniu — prosi jeden — daj mi trochę swych grzybów, na pewno to mi przyniesie szczęście!

— I mnie, dziadku!

— I mnie daj!

— I mnie też!

Dziadek obdarzył każdego i w ten sposób rozdał wszystkie grzyby. Znów chłopcy rozbiegli się po lesie na poszukiwanie grzybów, które miało jednak bardzo różny przebieg. Jeden chłopiec znalazł istotnie 2 grzyby, drugi natomiast 2 grzyby zgubił, trzeci znalazł tyle, ile dostał od dziadka, a czwarty zgubił połowę otrzymanych grzybów. Gdy chłopcy wrócili do domu i zliczyli swe grzyby, okazało się, że wszyscy mają jednakową ich ilość.

Ile grzybów dostał każdy z chłopców od dziadka i ile każdy z nich miał, gdy wrócił do domu?

Nietrudno zauważyć, że trzeciemu wnukowi dziadek dał najmniej grzybów, skoro musiał on nazbierać jeszcze drugie tyle, żeby mieć równo z braćmi.

Dla ułatwienia powiedzmy, że trzeciemu wnukowi dziadek dał jedną garść grzybów. Ile więc dał on takich garści czwartemu wnukowi?

Otóż trzeci wnuk przyniósł do domu 2 garści, gdyż sam nazbierał tyle grzybów, ile dał mu dziadek. Czwarty wnuk przyniósł do domu tyleż grzybów, co i trzeci, czyli również 2 garści; ale pamiętamy, że połowę swych grzybów czwarty wnuk zgubił po drodze, z czego wynika, że od dziadka dostał 4 garści.

Pierwszy wnuk przyniósł do domu 2 garści, lecz 2 grzyby sam znalazł, to znaczy, że dziadek dał mu 2 garści bez 2 grzybów. Drugi wnuk przyniósł do domu 2 garści, a w drodze zgubił 2 grzyby, czyli dostał 2 garści i jeszcze 2 grzyby.

A więc dziadek dał wnukom grzybów: 1 garść + 4 garści + 2 garści bez 2 grzybów + 2 garści i 2 grzyby, czyli razem 9 pełnych garści. W 9 równych garściach było 45 grzybów, czyli w każdej garści było $45 : 9 = 5$ grzybów.

Teraz mamy odpowiedź: trzeciemu wnukowi dał dziadek 1 garść, to jest 5 grzybów; czwartemu dał 4 garści, to jest $4 \cdot 5 = 20$ grzybów; pierwszemu — 2 garści bez dwóch grzybów, to jest $2 \cdot 5 - 2 = 8$ grzybów, wreszcie drugiemu dał 2 garści i 2 grzyby, to jest $2 \cdot 5 + 2 = 12$ grzybów.

28. Pierwsze przebłyski geniuszu

Ciekawą anegdotę z lat chłopięcych sławnego matematyka Karola Gaussa przytaczają jego biografowie.

Oto Karolek, gdy ukończył lat siedem, oddany został według zwyczaju do szkoły początkowej. Rachunków uczył w tej szkole człowiek starszy wiekiem, znany ze swej surowości. Nieraz mając do przejrzenia ćwiczenia uczniów z innych oddziałów ułatwiał sobie pracę w ten sposób, że dawał chłopcom zadanie nieco trudniejsze, które dziatwa musiała w zupełnym milczeniu samodzielnie rozwiązać. Umówiono się przy tym, że każdy z chłopców rozwiązawszy zadanie odniesie zeszyt nauczycielowi i położy go na katedrze.

Na którejś lekcji nauczyciel podyktował chłopcom następujące zadanie: „Znaleźć sumę wszystkich liczb od 1 do 40". Nauczyciel był pewien, że większą część lekcji uczniowie zajęci będą obliczaniem. Jakież było jego zdziwienie, gdy w chwilę po napisaniu treści zadania na tablicy usłyszał wesoły okrzyk: „Już skończyłem!" W tej chwili przed nauczycielem na katedrze znalazł się zeszyt opatrzony napisem: *Karol Gauss.* Rozgniewany nauczyciel sądząc, że ma do czynienia z uczniowskim wykrętem, mruknął pod nosem nie przerywając swej pracy: „Oduczę ja cię, smyku, podobnych sztuczek. Poczekaj tylko!"

Tymczasem Karolek zadowolony i pewny siebie powrócił na swe miejsce w ławce i czekał na rozpoczęcie poprawki.

Wreszcie po długich obliczeniach wszyscy uczniowie złożyli na katedrze swe zeszyty. Nauczyciel zabrał się do ich poprawiania. Większość uczniów mimo długich obliczeń podała wynik błędny, w zeszycie zaś Gaussa figurowała jedna tylko liczba — i ta była prawidłowa...

Mały Gauss usłyszawszy podyktowane przez nauczyciela zadanie błyskawicznie zorientował się w jego rozwiązaniu. Oto schematycznie przedstawiony proces rozumowania, jaki odbył się w młodocianej, lecz genialnej główce:

$$\begin{array}{r} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 20 \\ 40,\ 39,\ 38,\ \ldots,\ 21 \\ \hline 41,\ 41,\ 41,\ \ldots,\ 41 \end{array}$$

Największa i najmniejsza liczba ciągu dają w sumie 41. To samo otrzymamy dodając drugą z kolei liczbę ciągu do drugiej od dołu; ten sam też wynik uzyskamy dodając trzecią największą w ciągu do trzeciej najmniejszej i tak dalej. Jako wynik tego spostrzeżenia pomnożył chłopiec w myśli $20 \cdot 41$ i wypisał jedyną liczbę: 820.

Nauczyciel był człowiekiem rozumnym. Poznał, że ma przed sobą dziecko o zdumiewających zdolnościach, zajął się nim z całym oddaniem, lecz wkrótce z prostotą cechującą ludzi rozsądnych musiał stwierdzić, że uczeń już nic od nauczyciela swego nauczyć się nie może.



KAROL FRYDERYK GAUSS



29. Słuszny podział zapłaty

Dwaj Arabowie wędrowali przez pustynię. Do najbliższej oazy było jeszcze pół dnia drogi. Z zapasów żywności pozostało im tylko 8 sucharów: 3 należały do jednego, 5 do drugiego. Spotkali na drodze samotnego podróżnego wycieńczonego głodem. Ulitowali się nad nim i wspólnie z nim spożyli swe zapasy. Przy rozstaniu ów podróżny, by okazać im wdzięczność, wręczył przygodnym kompanom tytułem zapłaty 8 jednakowych złotych monet.

W jaki sposób powinni byli obdarowani podzielić się otrzymanymi pieniędzmi?

Przy podziale doszło do kłótni. Arab bowiem, który miał 5 sucharów, zażądał dla siebie 5 złotych monet, tymczasem jego towarzysz chciał otrzymać 4 monety twierdząc nie bez słuszności, że obaj przyczynili się do uratowania życia głodnego bogacza.

Nie mogąc się zgodzić na sposób podziału, po przybyciu do oazy zwrócili się do kadiego, miejscowego sędziego, z prośbą, by spór ich rozstrzygnął. Ten zawyrokował w sposób dla obu nieoczekiwany:

— Jesteście obydwaj w błędzie — powiedział z uśmiechem kadi. — Przypuśćmy, że każdy z waszych sucharów podzieliliście na 3 części; w ten sposób otrzymalibyście 24 części. Dalej przypuśćmy, że każdy z was spożył 8 części. Ten który miał 5 sucharów, to jest 15 części, oddał trzeciemu podróżnemu 7 części, a jego towarzysz ze swoich 3 sucharów ujął tylko 1 część. Z tego wynika, że monety powinny być tak podzielone: 7 monet należy się jednemu z was, a tylko jedna drugiemu.

A oto dwie swojskie odmiany tego samego zadania:

Dwaj chłopcy, Michał i Paweł, zbierali w lesie chrust i mieli spożyć śniadanie. Michał miał 4 kromki chleba, a Paweł 7. W tej właśnie chwili podszedł do nich podróżny i zwrócił się ze słowami:

— Zabłądziłem, chłopcy, w tym lesie, do wsi daleko, a głód mi dokucza. Podzielcie się ze mną tym, co macie!

— Zgoda, niech pan siada! Czym chata bogata, tym rada; wspólnie zjemy nasze zapasy — odpowiedzieli życzliwie.

Po śniadaniu podróżny sięgnął do kieszeni i wydobył złotówkę i dziesięciogroszówkę. Wręczając chłopcom pieniądze powiedział:

— Wyście się ze mną podzielili całym waszym śniadaniem, ja daję wam też wszystko, co mam przy sobie.

Gdy podróżny oddalił się, chłopcy zaczęli się spierać.

— Według mnie — twierdził Michał — pieniądze powinniśmy podzielić po połowie.

A Paweł z gniewem zaprzeczył:

— Za 11 kromek chleba, jakie mieliśmy, zapłacono nam 1 zł 10 gr. Za jedną więc kromkę wypada 10 gr. Tyś miał 4, a więc na ciebie wypada tylko 40 gr, moich było 7 kromek, więc rzecz jasna, że mam prawo do 70 gr.

Który z chłopców prawidłowo obliczył?



Dwóch stróżów nocnych gotowało sobie kaszę; jeden wsypał do garnka 20 deka kaszy, a drugi 30 deka. Kiedy kasza była już gotowa, podszedł do nich trzeci stróż i poprosił, by mu pozwolili wziąć udział w wieczerzy za zapłatą. Posiliwszy się zapłacił 75 gr.

Jak powinni podzielić otrzymane pieniądze dwaj właściciele kaszy?



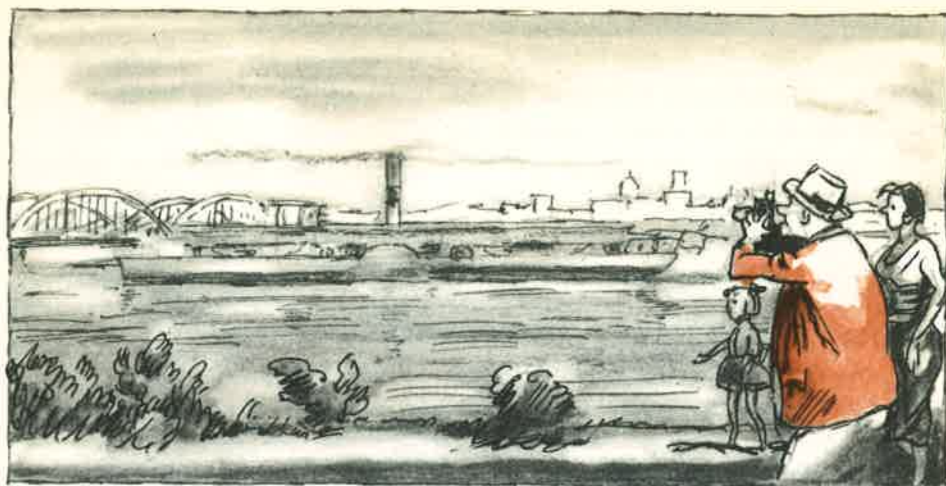
30. Zamiana zajęcy na kury

J. Wojtiachowski, matematyk rosyjski, w książce swej, wydanej przed stu z górą laty, przytacza tego rodzaju zadanie:

Wieśniak zamienił zające na kury, przy czym za 3 kury dawał 2 zające. Każda kura zniosła mu tyle jajek, ile wynosiła trzecia część wszystkich otrzymanych kur. Wieśniak sprzedając jaja brał za każde 9 jaj po tyle kopiejek, ile każda kura zniosła jaj, a za wszystkie otrzymał 24 ałtyny[1]). Ile było kur, a ile zajęcy?

(Patrz odpowiedź na stronicy 306).

[1]) Ałtyn — dawna nazwa rosyjskiej monety trzykopiejkowej.



31. Parostatek i tratwy

Parostatek płynie z Warszawy do Gdańska 2 dni. Ten sam parostatek z takim samym zanurzeniem płynie z Gdańska do Warszawy 3 dni. Ile dni płynąć będą tratwy z Warszawy do Gdańska?

Powiedzieć ktoś może, że zadanie to nie da się rozwiązać, bo za mało jest danych, bo nie wiadomo, jaka jest odległość od Warszawy do Gdańska wzdłuż Wisły ani z jaką prędkością płynęły tratwy. A jednak...

A jednak można rozwiązać zadanie.

Przypuśćmy na próbę, że nurt wiślany od Warszawy do Gdańska ma 450 km długości. Parostatek przepływa tedy w ciągu jednej doby 225 km płynąc w dół rzeki, a w górę rzeki przepływa tylko 150 km dziennie. Różnica prędkości — o 75 km na dobę mniej — tym się tłumaczy, że przy jeździe w dół rzeki prąd wody powiększa prędkość ruchu statku, a przy jeździe pod prąd — zmniejsza.

Za prędkość prądu przyjąć należy $75 : 2 = 37\frac{1}{2}$ km na dobę, a prędkość własna parostatku (na stojącej wodzie) wynosi $187\frac{1}{2}$ km na dobę. Wówczas statek będzie przepływał z prądem $187\frac{1}{2} + 37\frac{1}{2} = 225$ km na dobę, a przeciw prądowi $187\frac{1}{2} - 37\frac{1}{2} = 150$ km.

Tratwy płynąc z prędkością równą prędkości prądu wody w Wiśle dopłyną z Warszawy do Gdańska w ciągu $450 : 37\frac{1}{2} = 12$ dni.

Zadanie to można również rozwiązać nie biorąc pod uwagę żadnej określonej odległości Warszawy od Gdańska. Wystarczy, gdy się zważy, że parowiec z biegiem rzeki przepływa w ciągu doby $\frac{1}{2}$ drogi, płynąc zaś pod prąd — $\frac{1}{3}$ drogi. Gdyby więc nie było prądu, statek przepływałby $\frac{5}{12}$ odległości dziennie, woda zaś w Wiśle przepływa w ciągu dnia $\frac{1}{12}$ tejże odległości, a z tego wynika, że tratwy płynąć będą z Warszawy do Gdańska 12 dni.

32. Regularna jazda

Automobilista brał udział w konkursie jazdy regularnej. Według regulaminu powinien przejechać pewien odcinek drogi z przeciętną prędkością 48 km na godzinę. Tymczasem połowę drogi gnał z prędkością 60 km na godzinę. Do jakiej liczby musi obniżyć prędkość jazdy na drugiej połowie drogi, aby średnia prędkość spadła do 48 km na godzinę?

Jeśli Czytelnik sądzi, że drugą połowę drogi będzie musiał automobilista wlec się z prędkością 36 km na godzinę, to się myli, chociaż $\frac{60+36}{2} = 48$.

Przypuśćmy, że cała droga wynosiła 120 km. Na jazdę konkursową automobilista ma preliminowane $120 : 48 = 2\frac{1}{2}$ godziny — ani mniej, ani więcej. Skoro więc pierwszą połowę drogi, czyli 60 km, przejechał w ciągu godziny, to na drugą połowę drogi zostało mu $1\frac{1}{2}$ godziny, a więc musiał jechać z prędkością $60 : 1\frac{1}{2} = 40$ km na godzinę.

Rozważmy sprawę ogólniej. Przypuśćmy, że długość całej drogi wynosiła $2d$ i że automobilista przejechał pierwszą połowę drogi z prędkością v_1, a drugą połowę z prędkością v_2. Obliczmy, jaka była przeciętna prędkość v jazdy na całej drodze.

Na pierwszą połowę drogi automobilista zużył czas $\frac{d}{v_1}$, a na drugą połowę $\frac{d}{v_2}$, więc na całą drogę zużył czas $\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$. Z drugiej strony, na drogę $2d$ przy prędkości jazdy v potrzeba czasu $\frac{2d}{v}$. Otrzymujemy równanie

$$\frac{2d}{v} = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2},$$

które po skróceniu przez d i podzieleniu przez 2 daje związek

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)$$

Okazuje się, że odwrotność prędkości v jest średnią arytmetyczną między odwrotnościami prędkości v_1 i v_2. Mówimy w takim przypadku, że prędkość v jest *średnią harmoniczną* między prędkościami v_1 i v_2.

W naszym zadaniu mamy dane $v = 48$ i $v_1 = 60$, a trzeba wyznaczyć v_2. Z powyższego równania obliczamy

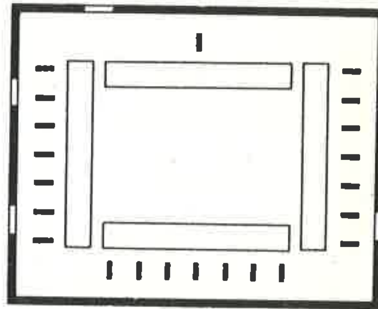
$$\frac{1}{v_2} = \frac{2}{v} - \frac{1}{v_1}; \quad \frac{1}{v_2} = \frac{2}{48} - \frac{1}{60} = \frac{1}{40},$$

a stąd $v_2 = 40$.



33. Sprytni turyści

W zajeździe stały cztery stoły dookoła ścian. Weszło 21 zgłodniałych turystów wracających z wycieczki. Zamówili obiad prosząc jednocześnie gospodarza, by zechciał go z nimi spożyć. Rozmieścili się wszyscy przy stołach w ten sposób, że przy trzech stołach zasiedli turyści, po siedmiu przy każdym stole, a przy czwartym siadł gospodarz.

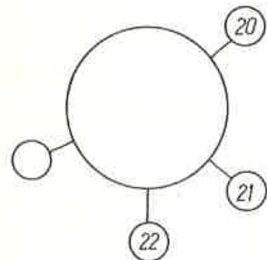


Turyści wśród żartów zaproponowali gospodarzowi, że płacić będzie za wszystkich ten, który przy liczeniu zostanie ostatni. Gospodarz niebacznie przystał na to. Liczono dokoła w kierunku obiegu wskazówek zegara, biorąc w rachubę również i gospodarza. Każdy siódmy był zwalniany i opuszczał zajazd. Ostatni został ku swemu niezadowoleniu sam gospodarz.

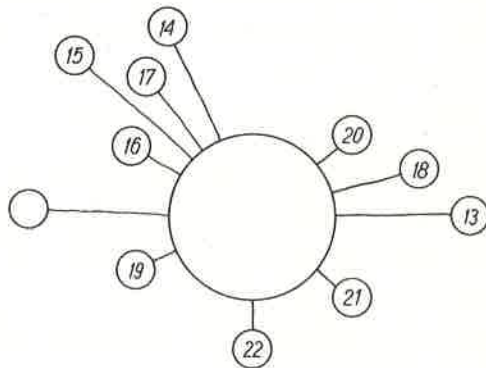
Od kogo zaczęto liczenie?

Rozwiążemy to zadanie rozpoczynając je „od końca". Dla ułatwienia obliczeń można użyć tabliczek domina, zapałek lub monet.

Niechaj moneta *22* oznacza gospodarza, który zostanie sam w gospodzie



Rys. I



Rys. II

po „wyliczeniu" wszystkich jego 21 gości. Układamy też monety *21* i *20*, jak to pokazano na rysunku I.

Począwszy od monety *20* liczymy w kierunku przeciwnym biegowi wskazówek zegara:

7	6	5	4	3	2	1
20	*22*	*21*	*20*	*22*	*21*	*20*

Liczba 1 padła na monetę *20*; posuwając się w tym samym kierunku dalej kładziemy monetę *19* (w pustym kółku na rysunku I).

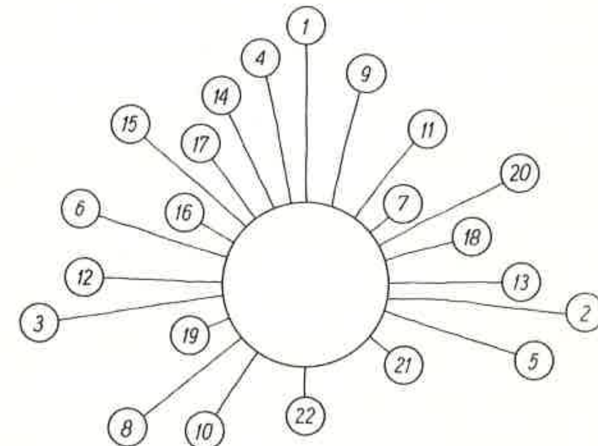
W ten sposób układamy kolejno coraz to nowe monety.

Na rysunku II widzimy, że już jest wyłożona moneta *13*. Liczymy wstecz zaczynając od liczby 7 i monety *13*:

7	6	5	4	3	2	1
13	*18*	*20*	*14*	*17*	*15*	*16*

Za monetą *16*, na którą padła liczba 1, kładziemy monetę *12* (w pustym kółku na rysunku II).

Gdy w ten sposób wyłożymy na stół wszystkie monety, otrzymamy taki obraz:



Rys. III

Ale to nie będzie jeszcze koniec naszej mozolnej pracy; trzeba jeszcze raz obliczyć 7 monet, aby wyznaczyć to miejsce, od którego rozpoczęto losowanie:

7	6	5	4	3	2	1
1	*4*	*14*	*17*	*15*	*16*	*6*

Okazuje się, że należy rozpocząć losowanie od miejsca opatrzonego numerem 6.

A jak prościej rozwiązać to zadanie?

34. Nieopatrzny gospodarz

W starym dziełku matematycznym G. Harsdörffera *Deliciae mathematicae* z roku 1677 podane jest następujące zagadnienie:

Pewien gospodarz zapraszając swych sześciu przyjaciół nalegał, aby mu przyrzekli, że tyle razy „pod rząd" przyjdą doń na wieczerzę, ile razy będą mogli łącznie z nim zmienić porządek miejsc przy okrągłym stole biesiadnym. Przez ile lat odwiedzać będą codziennie owi przyjaciele gościnne progi nieopatrznego gospodarza?

Zaproszenie wygaśnie dopiero po trzynastu z górą latach!...

Nietrudno to obliczyć, wiedząc że przy 7 „elementach", którymi będą owi współbiesiadnicy, może być $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutacyj, co da w iloczynie 5040.

Jaką radę należałoby dać owemu nieopatrznemu gospodarzowi, gdyby zwrócił się do nas z prośbą o ratunek przed rujnującym go zobowiązaniem? Można by mu poddać wprowadzenie dwu dość prostych zastrzeżeń.

Przede wszystkim, że w rachubę nie będzie wchodziła taka zmiana miejsc, jaka polegałaby na kolejnym przesunięciu się wszystkich o jedno, dwa itd., aż do siedmiu miejsc na prawo (albo na lewo). Zmniejszy to liczbę zapowiedzianych wieczerzy siedmiokrotnie, tj. z 5040 na 720. Ponadto nie należałoby za nowe ugrupowanie uważać i takiej zmiany miejsc, przy której każdy sąsiad z prawej strony stanie się sąsiadem z lewej. Zmniejsza to ilość proszonych kolacyj do 360.

Przez rok prawie musi jednak gościnny gospodarz podejmować codziennie swych gości. Na to nawet matematyka nie znajdzie już żadnej rady.

35. Osioł i muł

Osioł i muł, objuczone workami, szły z trudem pod górę. Osioł począł się przed mułem żalić na ciężar, jaki nań człowiek nałożył. Lecz muł na to mu odrzekł:

— Zwierzę leniwe, jakże się możesz skarżyć! Gdybym ja wziął jeden z twych worków, miałbym ich dwa razy więcej niż ty, a gdybyś ty wziął jeden z moich, dopiero mielibyśmy równo.

Ile worków niosło każde z tych zwierząt?

Gdyby osioł wziął jeden z worków muła, byłby miał na sobie wówczas równą z nim ilość worków; z tego wynika, że liczba worków, które niósł muł, musiała być o 2 większa od liczby worków niesionych przez osła.

Gdyby osioł rzucił jeden ze swych worków na drogę, to skoro muł miał poprzednio o 2 worki więcej, obecnie miałby o 3 worki więcej niż osioł; jeśliby zaś ów porzucony worek włożono na muła, miałby on wtedy o 4 worki więcej niż osioł. Ale wówczas miałby on — jak sam mówi — dwa razy więcej worków niż osioł. Znaczy to, że osioł po oddaniu jednego worka mułowi mógł mieć tylko 4 worki. Ostatecznie więc muł niósł 7 worków, a osioł — 5.



36. Jak chłopiec regulował swą jazdę na rowerze

Chłopiec mieszkał daleko od swej szkoły i jeździł do niej rowerem. Był on wielkim pedantem i wszędzie stosował „liczbę i miarę".

Któregoś dnia przejechał pół drogi z taką prędkością, że koło roweru wykonywało 2 obroty na sekundę, a drugą połowę drogi przejechał z taką prędkością, że koło roweru wykonywało 3 obroty na 2 sekundy. Cała droga zajęła mu 35 minut. Chłopiec pomyślał sobie, że jeżeli pół drogi przejechał z prędkością 2 obrotów koła na 1 sekundę, a drugą połowę drogi z prędkością 3 obrotów koła na 2 sekundy, to przeciętna prędkość wynosiła 5 obrotów koła na 3 sekundy — i z taką właśnie prędkością pojechał do domu. Okazało się jednak, że droga powrotna zajęła 36 minut, a nie 35, jak się spodziewał. Chłopiec pomyślał sobie, że zapewne zwolnił mimo woli tempo jazdy i dlatego stracił jedną minutę.

Drugiego dnia chłopiec przejechał połowę drogi z prędkością 2 obrotów koła na sekundę, a drugą połowę z prędkością 3 obrotów na sekundę i wtedy cała droga zabrała mu 25 minut. Chłopiec powiedział sobie, że w powrotnej drodze będzie osiągał 5 obrotów koła na 2 sekundy, czyli $2\frac{1}{2}$ obrotu na sekundę. Zamiast spodziewanych 25 minut jechał jednak tylko 24 minuty.

I znowu pomyślał sobie, że zapewne przyśpieszył mimo woli tempo jazdy i dlatego „nadrobił" jedną minutę. Ale jednak to go zdziwiło, że gdy wczoraj jechał wolno, to jeszcze zwolnił tempo, a dzisiaj — przy szybkiej jeździe — jeszcze przyśpieszył tempo.

Zabrał się więc do obliczeń, by sprawdzić, w czym tkwi źródło rozbieżności faktów z przewidywaniami.

Zmierzył długość obwodu koła roweru; wynosiła 2,25 m. Pierwszego dnia wracał do domu z prędkością 5 obrotów koła na 3 sekundy; łatwo było obliczyć, że prędkość wynosiła 3,75 m na sekundę, czyli 225 m na minutę.

A ponieważ droga powrotna trwała 36 minut, więc długość drogi wynosiła 8100 m.

A jak było wczoraj z jazdą w tamtą stronę, do szkoły? Pierwszą połowę drogi, czyli 4050 m, jechał z prędkością 2 obrotów koła na sekundę, czyli 4,50 m na sekundę; ta pierwsza połowa drogi zajęła 4050 : 4,50 = 900 sekund, czyli 15 minut. Drugą połowę drogi jechał z prędkością 3 obrotów na 2 sekundy, czyli 3,375 m na sekundę; ta druga połowa drogi zabrała mu 4050 : 3,375 = 1200 sekund, czyli 20 minut. Razem cała droga do szkoły zajęła 15 + 20 = 35 minut, a nie 36 minut!

Gdzież, do licha, podziała się ta minuta?

Przypomnijmy sobie, jak chłopiec obliczał przeciętną prędkość jazdy:

2 obroty na 1 sek.
3 obroty na 2 sek.
5 obrotów na 3 sek.

czyli 1 obrót na $\frac{3}{5}$ sekundy.

A teraz obliczmy przeciętną prędkość inaczej. Na pierwszej połowie drogi chłopiec jechał z prędkością 2 obrotów na 1 sekundę, czyli 1 obrót na $\frac{1}{2}$ sekundy, a na drugiej połowie drogi jechał z prędkością 3 obrotów na 2 sekundy, czyli 1 obrót na $\frac{2}{3}$ sekundy. Przeciętnie robił 2 obroty na $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ sekundy, czyli 1 obrót na $\frac{7}{12}$ sekundy.

Cała droga wynosiła 8100 m, czyli 8100 : 2,25 = 3600 obrotów koła, a ponieważ 1 obrót trwał $\frac{7}{12}$ sekundy, więc na 3600 obrotów potrzeba było $3600 \cdot \frac{7}{12} = 2100$ sekund, czyli 35 minut.

Wszystko się pięknie zgadza! Trzeba tylko w sposób właściwy obliczyć przeciętną prędkość jazdy.

A teraz wykonajmy obliczenia dla drugiego dnia.

Pierwsza połowa drogi przy prędkości 2 obrotów na sekundę, tzn. 4,50 m na sekundę, zajęła 4050 : 4,50 = 900 sek., czyli 15 min. Druga połowa drogi przy prędkości 3 obrotów na sekundę, to znaczy 6,75 m na sekundę, zajęła 4050 : 6,75 = 600 sek., czyli 10 min. Cała droga trwała 10 + 15 = 25 minut.

Obliczmy przeciętną prędkość jazdy naszą nową metodą.

1 obrót na $\frac{1}{2}$ sek.
1 obrót na $\frac{1}{3}$ sek.
2 obroty na $\frac{5}{6}$ sek.

czyli 1 obrót na $\frac{5}{12}$ sekundy.

Wiemy już, że cała droga wymagała 3600 obrotów koła, co przy zużyciu $\frac{5}{12}$ sek. na jeden obrót wymaga 1500 sek., czyli 25 min. — w zupełnej zgodzie z przewidywaniem.

37. To niemożliwe!...



Poniższą anegdotę podaje Lagarrigue w swych *Récréations scientifiques*:

Pewna Włoszka, wyprawiając na targ trzy córki z pomarańczami, dała najstarszej 50 sztuk, młodszej 30, a najmłodszej, która była jeszcze dzieckiem, włożyła do koszyczka 10. Przykazała przy tym sprzedawać towar jak najkorzystniej, ale po tych samych cenach, by sobie nie robiły konkurencji.

Jakież było zdumienie matki, gdy dziewczęta wróciwszy oświadczyły, że uczyniły, jak im nakazała, i że wszystkie trzy otrzymały równe sumy ze sprzedaży.

— Jak to być może, abyście sprzedając po tych samych cenach osiągnęły te same kwoty za 50, za 30 i za 10 pomarańcz?! To niemożliwe! ... Żartujecie!

A jednak jest to zupełnie możliwe: dziewczęta sprzedały najpiękniejsze pomarańcze po 15 lirów, a resztę po 5 lirów za 7 sztuk. Najmłodsza z nich miała 3 wielkie, dorodne pomarańcze, średnia siostra 2, a najstarsza tylko 1.

38. Pomysłowi handlarze nierogacizny

Sławny Alkuin, towarzysz Karola Wielkiego, w dziełku swym pod tytułem *Propositiones ad acuendos juvenes* przytacza takie pozornie paradoksalne zadanie:

Dwaj handlarze kupili wspólnie stado wieprzy i zapłacili ogółem 100 sztuk ówczesnej monety zwanej soldem (od łacińskiego *solidus*). Gdy przystąpili do sprzedaży wieprzy, nikt im nie chciał dać więcej ponad cenę, którą oni sami dali, to jest po 2 soldy za 5 sztuk. Ale jakże tu sprzedać bez zarobku! Rada w radę, postanowili podzielić stado na dwie części. Uczynili tak i sprzedali wieprze w cenie 2 soldy za 5 sztuk, a jednak nie tylko odebrali swoje pieniądze, lecz coś jeszcze zyskali na tej transakcji.

Jak ten pozorny paradoks można rozwiązać?

Kupcy podzielili stado w ten sposób, że jeden wziął wszystkie okazalsze wieprze, drugi same warchlaki. Pierwszy sprzedał 2 wieprze za 1 solda, drugi zaś 3 za 1 solda.

Sprzedali więc istotnie po cenie nabycia, tj. za 5 sztuk po 2 soldy. Pierwszy, sprzedawszy 120 wieprzy, otrzymał 60 soldów, drugi zaś za taką samą ilość wieprzy pośledniejszego gatunku uzyskał tylko 40 soldów, ale razem osiągnęli sumę pierwotną, to znaczy koszt nabycia w kwocie 100 soldów — i w zysku pozostało im jeszcze dziesięć sztuk nierogacizny.

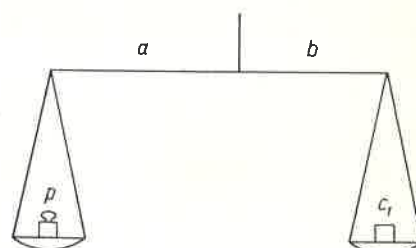
39. Kłopoty sprzedawcy

Pewien sprzedawca zauważył, że zwykła waga szalkowa, którą się posługiwał, ma jedno ramię dłuższe, nie daje więc właściwego ciężaru. Postanowił oczywiście odesłać wagę do naprawy; tak się jednak złożyło, że musiał wpierw jeszcze odważyć kupującemu pewną ilość towaru. Nie chcąc odważyć za dużo ani też za mało, postanowił odważyć połowę na jednej szalce, a drugą połowę na drugiej szalce.

Gdy tak dowcipnym, jak mu się zdawało, pomysłem chwalił się przed pewnym matematykiem, ten po chwili namysłu musiał sprostować jego błędne mniemanie. Uczciwy sprzedawca wydał bowiem za dużo towaru.

Oznaczamy owe różne długości ramion wagi a i b. Otóż przy pierwszym ważeniu (rys. I) zamiast właściwej wagi towaru p kupujący otrzymał wagę

$$c_1 = \frac{a}{b} \cdot p,$$



Rys. I

przy drugim zaś ważeniu (rys. II) otrzymał

$$c_2 = \frac{b}{a} \cdot p.$$

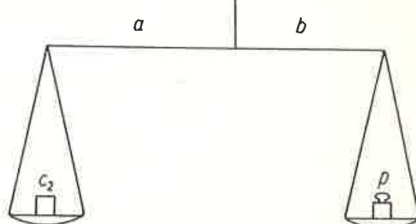
Sprzedawca tedy wydał razem towaru

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) p,$$

wziął zaś zapłatę za $2p$. Jeżeli więc

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2,$$

to sprzedawca wydał za dużo towaru.



Rys. II

I tak właśnie być musiało, gdyż jeżeli

$$a \neq b, \text{ to } (a - b)^2 > 0, \text{ stąd } a^2 + b^2 > 2ab,$$

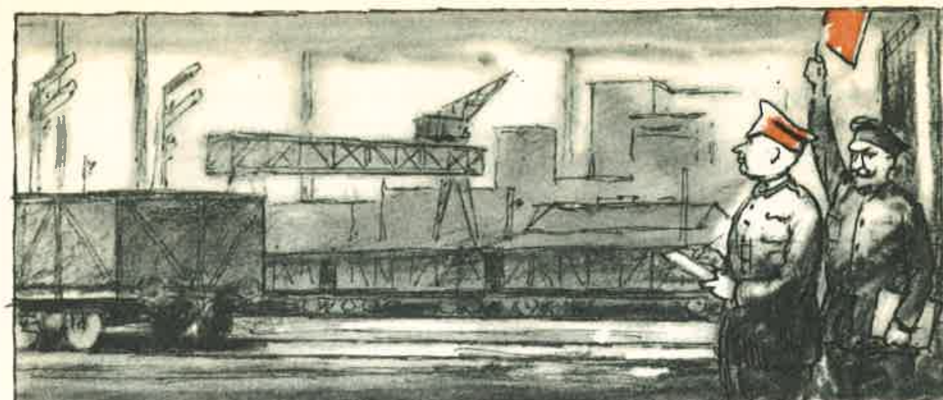
czyli

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} > 2,$$

i ostatecznie

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

Tylko wtedy, gdyby a równało się b, sprzedawca wydałby średnią ilość towaru. Na fałszywej wadze można więc tylko albo nieuczciwie zyskać, albo uczciwie... stracić.



40. Transport węgla

Do elektrowni nadeszło 500 ton węgla w 18 wagonach. Wagony zawierały ładunki po 15, 20 i 30 ton. Ile było wagonów każdego rodzaju?

Jeżeli powiemy, że było x wagonów po 15 ton, y wagonów po 20 ton z wagonów po 30 ton, to będziemy mogli ułożyć dwa równania:

$$\begin{cases} 15x + 20y + 30z = 500 \\ x + y + z = 18 \end{cases}$$

Mamy dwa równania z trzema niewiadomymi. A jednak możemy rozwiązać zadanie dzięki temu, że niewiadome muszą wyrażać liczby naturalne.

Dzieląc wszystkie wyrazy pierwszego równania przez 5 otrzymujemy

$$3x + 4y + 6z = 100$$

Mnożąc wszystkie wyrazy drugiego równania przez 6 będziemy mieli

$$6x + 6y + 6z = 108$$

Wykonajmy teraz odejmowanie:

$$\begin{array}{l} 6x + 6y + 6z = 108 \\ 3x + 4y + 6z = 100 \\ \hline 3x + 2y \quad\quad = 8 \end{array}$$

Otrzymaliśmy równanie $3x + 2y = 8$, które w liczbach naturalnych ma jedyne rozwiązanie: $x = 2$, $y = 1$. (Rozwiązanie $x = 0$, $y = 4$ należy odrzucić, gdyż wówczas nie byłoby wagonów po 15 ton).

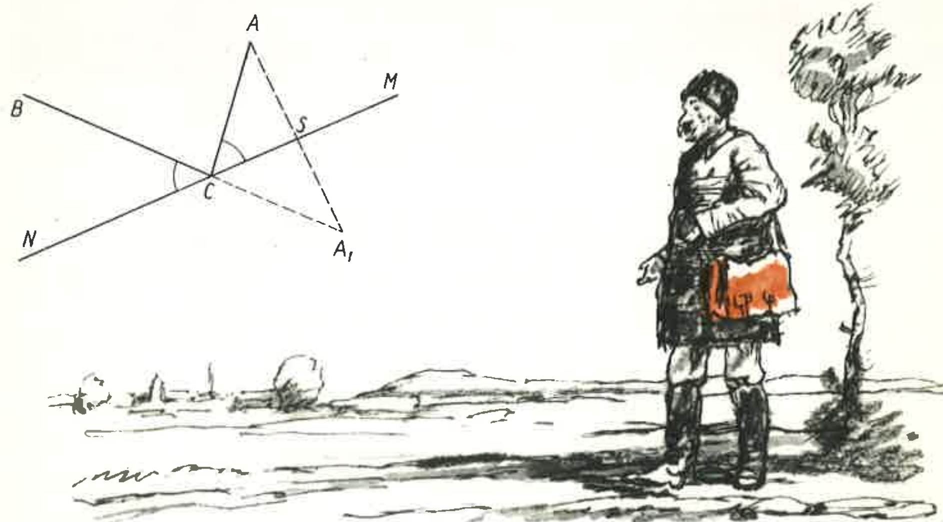
Teraz łatwo napisać odpowiedź:

2 wag.	po 15 ton	30 ton
1 wag.	po 20 ton	20 „
15 wag.	po 30 ton	450 „
18 wag.		500 ton

41. W którym miejscu przy szosie czekać na pocztę

W pewnej odległości od szosy, biegnącej w tym miejscu po linii prostej, leżą dwie wioski. Szosą przejeżdża poczta. Sołtysi umówili się, że jednego dnia jeden, drugiego dnia drugi będą wysyłali posłańca; posłaniec zaś odbierze pocztę i naprzód odniesie do sąsiada listy, które poczta dlań przyniosła, a następnie z resztą korespondencji powróci do swej wsi.

W którym miejscu szosy powinien znaleźć się posłaniec, aby odbyć najkrótszą drogę?



Jest to zagadnienie nie bez znaczenia, gdyż jeślibyśmy przypuścili, że posłaniec nakłada niepotrzebnie choć tylko 100 metrów drogi dziennie, drobna ta nieścisłość w ciągu roku uczyniłaby $36\frac{1}{2}$ kilometra zbytecznej fatygi, zdzierania podeszew i straty czasu.

Jeśli szosę oznaczymy linią *MN*, a wsie punktami *A* i *B*, to dla odnalezienia poszukiwanego punktu na szosie należy z punktu *A* przeprowadzić prostopadłą do *MN* i od punktu przecięcia *S* odłożyć $SA_1 = SA$, następnie połączyć linią prostą *B* z A_1. Wówczas przecięcie tej linii z szosą da poszukiwany punkt *C*.

Obrazowo można by to przedstawić, jak następuje: wyobraźmy sobie, że wzdłuż szosy ustawione jest olbrzymie zwierciadło zwrócone w stronę wsi. Wówczas posłaniec wychodzący z *B* powinien się kierować w prostej linii ku odbiciu wsi *A* w lustrze — i odwrotnie: posłaniec z *A* powinien iść ku *B* widzianemu w zwierciadle. Wówczas obaj osiągną ów poszukiwany punkt *C*.



42. Pogrobowcy

Młody mąż, czując się bliski śmierci, zawezwał notariusza, by spisać testament. Wiedział, że za parę miesięcy miała przyjść na świat dziecina. Rozporządził więc posiadanym majątkiem w ten sposób: jeżeli przyjdzie na świat syn, to matka otrzyma tylko połowę tego, co przypadnie synowi, a jeśli córka, to matka otrzyma kwotę dwa razy większą niż córka. Lecz przyszły na świat ... bliźnięta — syn i córka. Jak należy podzielić spadek?

Zadanie powyższe jest odmianą bardzo starodawnego, gdyż jeszcze z rzymskich czasów datującego się zagadnienia prawniczego. Brzmi ono tak:

Ktoś umierając pozostawił żonę oczekującą przyjścia na świat dziecka; zrobił tedy zapis, mocą którego w razie przyjścia na świat potomka płci męskiej miał on otrzymać $\frac{2}{3}$ spadku, matka zaś $\frac{1}{3}$, w razie przeciwnym córka miała dziedziczyć $\frac{1}{3}$, a matka $\frac{2}{3}$ majątku. Urodziły się bliźnięta. Jak wypełnić wolę zapisodawcy?

Znakomity rzymski jurysta S a l v i a n J u l i a n tak rozwiązał ów *casus* prawniczy: Majątek powinien być podzielony na siedem części; z tego $\frac{4}{7}$ ma otrzymać syn, $\frac{2}{7}$ matka, $\frac{1}{7}$ córka.

Rzymianie byli słabymi matematykami, ale niezrównanymi jurystami.

43. Kupno hufnali w podkowach, a w dodatku konia

W podręczniku rosyjskiego matematyka L. M a g n i c k i e g o, wydanym w r. 1703, znajdujemy następującą anegdotę:

Pewien handlarz sprzedał konia za 156 rubli. Ale wieśniak nabywca wkrótce po tej sprzedaży rozmyślił się i począł molestować handlarza, żeby wziął konia z powrotem, a jemu oddał pieniądze, gdyż koń nie jest wart tak wielkiej sumy. Handlarz wówczas zaproponował mu inną transakcję: „Jeśli uważasz, że koń jest za drogi, to ci go daję darmo, a ty kup tylko ode mnie hufnale w jego podkowach. Zapłacisz mi tanio: za pierwszy hufnal połuszkę (połuszka = $\frac{1}{4}$ kopiejki), za drugi hufnal — 2 połuszki, za trzeci — kopiejkę itd." Wieśniak kombinując sobie, że nie może wypaść chyba za wszystkie hufnale razem więcej niż jakie 10 rubli, chętnie zgodził się na taką propozycję. Czy wieśniak ten oszukał się i na ile rubli?

Hufnali w każdej podkowie jest po 6, zadanie więc sprowadza się do obliczenia sumy postępu geometrycznego złożonego z 24 wyrazów tego typu:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{23}$$

Tyle trzeba zapłacić połuszek, a to w sumie wynosi „tylko" 41 943 rubli i $3\frac{3}{4}$ kopiejki. Przy takiej cenie hufnali można by istotnie było dodać konia, nawet z rzędem — gratis.



44. Spłowiałe rękopisy

Odnaleziono bardzo cenne, stare rękopisy matematyczne, które jednak wskutek niewłaściwego przechowywania spłowiały tak dalece, że tylko zarysy niektórych cyfr można było odróżnić.

Cyfry nieczytelne oznaczymy gwiazdkami. Należy w ich miejsce wstawić pierwotnie tam wypisane cyfry.

```
   * 8 4 *            1 * 5       5 * 1 7
 + 2 * * 3          * * 1 7     + * 4 * 8
 ---------        + 5 8 * *     ---------
   6 5 2 9        ---------       6 8 1 *
                  * 0 8 4 6

     8 * * 7         3 * 5 7
   − * 3 5 *       − * 9 8 *
   ---------       ---------
     6 1 7 7           4 * 6
```

Odtworzenie tych działań nie przedstawia żadnej trudności. Trudniejsze będzie przywrócenie pierwotnych liczb w tych miejscach rękopisu, gdzie było mnożenie lub dzielenie:

```
        * * *          * * * 3
    ×   4 5 7        ×   * * *
    ---------        ---------
      * * * *          * 7 0 *
    1 7 0 5          * 2 1 3
  * * * *          * * * 9
  -----------      -----------
  * * * * * *      * * * * * *
```



```
      * * 8 *
  -----------
  * * * * * * : * * *
  * * *
  -------
  3 0 2 *
  * 6 9 5
  -------
    * * 1 1
    3 * 8 *
    -------
      2 * 1 *
      * * * *
      -------
```

Jeszcze trudniejsza sprawa z dwoma spłowiałymi rękopisami, które cytują amerykańscy matematycy. Pierwszy znany jest pod nazwą *problemu czterech czwórek*, drugi — *problemu siedmiu siódemek*. Oto one:

```
        * 4 * *
  -------------
  * * * * * * 4 : * * *
  * * *
  -------
    * * 4 *
    * * * *
    -------
      * * * *
        * 4 *
      -------
      * * * *
      * * * *
      -------
```

```
              * * 7 * *
  -------------------
  * * 7 * * * * * * * : * * * * 7 *
  * * * * * *
  -----------
  * * * * 7 * *
  * * * * * * *
  -------------
      * 7 * * * *
      * 7 * * * *
      -----------
      * * * * * * *
      * * * * 7 * *
      -------------
          * * * * * *
          * * * * * *
          -----------
```

Problem czterech czwórek ma cztery rozwiązania:

1 337 174 : 943 = 1418
1 343 784 : 949 = 1416
1 200 474 : 846 = 1419
1 202 464 : 848 = 1418

Problem siedmiu siódemek ma pięć rozwiązań [1]):

7 375 252 070 : 125 470 = 58 781
7 375 310 851 : 125 471 = 58 781
7 375 369 632 : 125 472 = 58 781
7 375 428 413 : 125 473 = 58 781
7 375 487 194 : 125 474 = 58 781

Jeszcze jeden zniszczony rękopis podaje J. Degrazia. Znaleziono zapis dzielenia tak zniszczony, że tylko jedną cyfrę można było przeczytać:

```
      * * * * * 8 * *
* * * * * * * * * * * : ?
* * *
    * * *
    * * *
      * * *
      * * *
            * *
            * *
              * * *
              * * *
```

A jednak udało się odtworzyć cały zapis! Oto jakim sposobem:

Iloraz jest napisany nad mnożną. Cyfra 8 w ilorazie daje iloczyn cząstkowy dwucyfrowy; stąd wniosek, że dzielnik nie może być większy od 12. Iloczynom cząstkowym trzycyfrowym może odpowiadać w ilorazie tylko cyfra 9, a w takim razie dzielnik nie może być mniejszy od 12. A więc dzielnikiem jest liczba 12.

Teraz już łatwo możemy ustalić wszystkie cyfry w zapisie dzielenia zaczynając od ostatniego iloczynu cząstkowego i ostatniej cyfry ilorazu:

```
    9 0 9 9 0 8 0 9
1 0 9 1 8 8 9 7 0 8 : 1 2
1 0 8
    1 1 8
    1 0 8
      1 0 8
      1 0 8
            9 7
            9 6
              1 0 8
              1 0 8
```

[1]) Poprzednie wydania „Lilavati" zawierały tylko czwarte z tych rozwiązań. Pozostałe rozwiązania nadesłał ob. A. Cendrowski ze Stalowej Woli.

45. Zaplamiony rachunek

Przy przeglądaniu notatnika zmarłego kupca znaleziono następującą notatkę:

„Ze sprzedaży... resztek sukna po 49 zł 36 gr za każdą otrzymano * * * 7 zł 28 gr".

Notatka ta zalana była w niektórych miejscach atramentem tak, że nie można było odcyfrować ani liczby sprzedanych sztuk, ani pierwszych trzech cyfr otrzymanej sumy. Czy można będzie na podstawie wiadomych pozycji odtworzyć liczbę sprzedanych sztuk sukna oraz całkowitą sumę otrzymaną z tej sprzedaży?

Zadanie można rozwiązać w taki sposób:

Według danych cała otrzymana suma nie przekracza oczywiście 10 000 złotych. Czyli liczba sprzedanych resztek jest nie większa od 203.

Ostatnia cyfra niewiadomej liczby resztek powinna być taka, żeby przy pomnożeniu przez 6 dawała iloczyn kończący się na 8; taką cyfrą może być tylko 3 lub 8.

Przypuśćmy, że ostatnią cyfrą niewiadomej liczby resztek była 3. Wartość trzech resztek wynosiłaby 14 808 groszy. Odejmując tę liczbę od uzyskanej sumy otrzymamy liczbę kończącą się na 920.

Druga od końca cyfra, czyli cyfra dziesiątek w liczbie resztek może być albo 2, albo 7, gdyż tylko te cyfry, pomnożone przez 6, dadzą iloczyn kończący się na 2.

Przyjmijmy, że niewiadoma liczba kończy się na 23. Odejmując cenę 23 sztuk sukna od całej sumy otrzymanej ze sprzedaży uzyskamy liczbę kończącą się na 200. Trzecia cyfra może być albo 2, albo 7; lecz z powodu, że niewiadoma liczba nie przekracza 203, to nasze przypuszczenie należy odrzucić.

Jeśli przyjmiemy, że niewiadoma liczba kończy się na 73, to trzecia cyfra byłaby albo 4, albo 9; takie przypuszczenie również musi odpaść.

A więc ostatnią cyfrą nie może być 3. Pozostaje przypuszczenie, że jest to 8. Rozumowania podobne do poprzednich wykażą nam, że drugą cyfrą może być albo 4, albo 9; z tych dwóch przypuszczeń możliwe do przyjęcia jest tylko drugie.

Zadanie ma tylko jedno rozwiązanie: sprzedanych resztek sukna było 98, całkowita suma uzyskana wynosi 4837 zł 28 gr.

Oczywiście zadania tego typu można również rozwiązywać sposobem algebraicznym.



46. Odcyfrowania

Duże podobieństwo do zadań polegających na przywracaniu spłowiałych cyfr mają zadania takiego typu:

```
   I C C        I N U       E M A
×    I N     ×    N U     U E M A : M A
   N T T        L N U     M A
 I C C        N U S         T M
 I A N T      O I N U       A S
                            E M A
                            E M A
```

Litery oznaczają cyfry; w każdym poszczególnym zadaniu te same litery oznaczają te same cyfry, ale nie we wszystkich trzech razem wziętych.

Rozwiązywanie takich zadań jest względnie łatwe. Odpowiedzi na powyższe trzy zadania:

$$144 \cdot 12 = 1728$$
$$125 \cdot 25 = 3125$$
$$3125 : 25 = 125$$

Łatwo też układać podobne zadania, a nawet bardziej skomplikowane.

47. Błędne, a jednak pouczające mnożenia i dzielenia

Nauczyciel matematyki dał uczniowi mnożenie dwóch liczb, z których mnożna przewyższa mnożnik o 202 jedności. Po wykonaniu mnożenia nauczyciel kazał je sprawdzić za pomocą dzielenia znalezionego iloczynu przez mnożnik. Otrzymany iloraz wynosi 288 i zostaje reszta 67; z tego wynika, że mnożenie zostało wykonane błędnie.

Uczeń odszukawszy błąd przyznaje:

— W dodawaniu poszczególnych iloczynów cząstkowych obliczyłem o jedną jedynkę mniej.

— Tu nie chodzi o jedynkę, lecz o tysiąc, który został przez ciebie opuszczony — sprostował nauczyciel.

Odszukajmy na podstawie powyższego obie liczby dane do mnożenia.

Iloczyn z mnożenia 288 przez mnożnik jest o $1000 + 67 = 1067$ mniejszy od właściwego wyniku mnożenia.

Inaczej mówiąc, mnożnik pomnożony przez 288 i powiększony o 1067 równa się iloczynowi poszukiwanemu. Stąd wynika, że 1067 dzieli się bez reszty przez mnożnik. Mnożnik ten musi być większy niż reszta, jaka wypadła z dzielenia przy sprawdzaniu, to jest większy niż 67. Rozkładamy liczbę 1067 na czynniki: $1067 = 11 \cdot 97$. Stąd wniosek ostateczny, że mnożnik musi być równy 97. Wówczas mnożna wynosi $97 + 202 = 299$, iloczyn właściwy jest 29 003, błędny zaś iloczyn, znaleziony przez ucznia, wynosił 28 003.

48. Rozlewanie wina

Dwaj przyjaciele sprowadzili wspólnie ośmiolitrową beczułkę wina. Ten, który wino sprowadził, ma zatrzymać beczułkę z połową jej zawartości. Drugi jednak ma tylko dwa gąsiorki, w których stale wino przechowuje: jeden o pojemności 5 litrów, drugi — 3 litrów. W jaki sposób można dokonać podziału posługując się ową beczułką i dwoma gąsiorkami?

Rozwiązanie sprowadza się do tego, że z pełnej ośmiolitrowej beczułki należy odlewać do pustych gąsiorków, z nich znów przelewać i tak dalej.

Zadanie ma dwa rozwiązania; uwidoczniamy je w dwóch tablicach, które jasno wykazują, ile w każdym naczyniu pozostanie wina po każdorazowym odlaniu.

Rozwiązanie I	Beczułka 8-litrowa	Gąsiorek 5-litrowy	Gąsiorek 3-litrowy
Stan początkowy	8	0	0
Po 1 przelaniu	3	5	0
,, 2 ,,	3	2	3
,, 3 ,,	6	2	0
,, 4 ,,	6	0	2
,, 5 ,,	1	5	2
,, 6 ,,	1	4	3
,, 7 ,,	4	4	0

Rozwiązanie II	Beczułka 8-litrowa	Gąsiorek 5-litrowy	Gąsiorek 3-litrowy
Stan początkowy	8	0	0
Po 1 przelaniu	5	0	3
,, 2 ,,	5	3	0
,, 3 ,,	2	3	3
,, 4 ,,	2	5	1
,, 5 ,,	7	0	1
,, 6 ,,	7	1	0
,, 7 ,,	4	1	3
,, 8 ,,	4	4	0

Do tego samego typu należą też dwa niżej podane zadania, których rozwiązania — nieco więcej skomplikowane — pozostawiamy Czytelnikom:

1. Pełna beczułka zawiera 16 litrów, a puste — 11 i 6 litrów.
2. Pełna beczułka zawiera 42 litry, a puste — 27 i 12 litrów.

Inne bardziej skomplikowane zadanie na ten sam temat podaje W. W. Rouse Ball w swym dziele *Mathematical Recreations and Essays*:

Mamy cztery naczynia: jedno 24-litrowe, pełne wina, drugie 13-litrowe, trzecie 11-litrowe i czwarte 5-litrowe. Te trzy ostatnie naczynia są próżne. Należy do trzech pierwszych naczyń (posiłkując się oczywiście i czwartym) rozlać wino tak, żeby w każdym znalazło się 8 litrów.

Oto schemat rozwiązania:

Naczynie	I	II	III	IV
Pojemność	24	13	11	5
(1)	24	0	0	0
(2)	13	0	11	0
(3)	8	0	11	5
(4)	0	8	11	5
(5)	11	8	0	5
(6)	16	8	0	0
(7)	16	0	8	0
(8)	3	13	8	0
(9)	3	8	8	5
(10)	8	8	8	0

Do tego rodzaju zadań można zaliczyć i poniższe, nieco jednak odmienne, w którym chodzi nie tylko o podział wina, ale i beczek:

Trzy osoby mają równo podzielić między sobą 21 beczułek wina, z których 7 jest pełnych, 7 napełnionych do połowy i 7 próżnych. Należy ustalić, w jaki sposób osoby te mogą się podzielić, żeby każda miała jednakową ilość wina i jednakową ilość beczułek — bez przelewania wina z beczułki do beczułki.

Należy przypuścić oczywiście, że wszystkie beczułki pełne, napełnione do połowy i próżne są jednakowej wielkości. Jasne jest, że każda z osób powinna otrzymać po 7 beczułek. Obliczmy teraz, ile wina powinno wypaść na każdego.

Jest siedem beczułek pełnych i siedem próżnych. Jeśliby można było z każdej pełnej beczułki odlać połowę do próżnej, to otrzymałoby się 21 beczułek napełnionych do połowy. Czyli na każdego powinno przypaść po 7 do połowy napełnionych beczułek wina. Zorientowawszy się w tym możemy już łatwo podzielić wino na równe części w następujący sposób:

	Pełnych beczułek	Beczułek napełnionych do połowy	Beczułek próżnych
Pierwsza osoba	2	3	2
Druga ,,	2	3	2
Trzecia ,,	3	1	3

Ale oto inne rozwiązanie:

	Pełnych beczułek	Beczułek napełnionych do połowy	Beczułek próżnych
Pierwsza osoba	3	1	3
Druga ,,	3	1	3
Trzecia ,,	1	5	1



49. Wilk, koza i kapusta

Jest to jedno z najpopularniejszych, a zarazem najdawniejszych zadań na tak zwaną „przeprawę". Znajduje się ono już u Alkuina w dziele z VIII wieku, którego tytuł brzmi: *Propositiones ad acuendos juvenes*, a prawdopodobnie zaczerpnięte zostało przez znakomitego współpracownika Karola Wielkiego z tradycji lub ksiąg jeszcze dawniejszych.

Wieśniak musi przewieźć przez rzekę wilka, kozę i kapustę. Łódka jednak jest tak mała, że może się w niej zmieścić tylko wieśniak i jedno z tych trojga. Jeśli zostawi wilka z kozą, to wilk pożre kozę; jeśli zostawi kozę z kapustą, to koza zje kapustę. Jak poradził sobie wieśniak z transportem?

Należy oczywiście zacząć od kozy. Wieśniak przewozi kozę, następnie wraca po wilka, a przeprawiwszy go na drugą stronę rzeki zabiera kozę z powrotem, zostawia ją na brzegu, odwozi kapustę i wreszcie wraca po kozę. W ten sposób przeprawa kończy się pomyślnie.

50. Mozolna przeprawa żołnierzy

Oddział żołnierzy doszedł do rzeki, przez którą koniecznie musi się przeprawić. Most po niedawnej powodzi jest jeszcze w ruinie, rzeka zaś zbyt głęboka, by próbować przebrnąć ją w bród. W małej łódce u brzegu rzeki bawią się dwaj chłopcy. Łódka jest tak maleńka, że zaledwie jeden żołnierz mógłby się w niej pomieścić. Mimo to ta właśnie łódka przy czynnym udziale chłopców przewiozła na drugą stronę rzeki cały oddział żołnierzy. Jak się to stało?

Chłopcy przepływają razem na brzeg przeciwległy. Jeden tam pozostaje, drugi zaś z łódką wraca do żołnierzy. Wówczas przepływa jeden żołnierz, a chłopiec z przeciwnego brzegu odwozi łódkę z powrotem do pozostałych żołnierzy, zabiera swego towarzysza, odwozi go na drugą stronę rzeki i znów odstawia łódkę z powrotem, wysiada i drugi żołnierz przeprawia się przez rzekę. W ten sposób przy dwóch przeprawach tam i z powrotem przepływa jeden żołnierz. Powtarza się to dopóty, dopóki wszyscy żołnierze i oficerowie nie zostali przewiezieni na drugą stronę rzeki, co, choć w teorii jest możliwe, musiało w praktyce trwać dość długo.

51. Zazdrośni mężowie

Anegdota o trzech zazdrosnych mężach znajduje się już w rękopisie z XIII wieku, w którym dwaj niemieccy studenci Firri i Tyrri stawiają sobie wzajemnie wesołe zadania do rozwiązania. Przytacza je potem znakomity matematyk francuski z XV wieku Mikołaj Chuquet w swej księdze pod tytułem *Triparty en la science de nombres*, uważanej za najdawniejszy pomnik nauki francuskiej w dziale arytmetyki. Cytuje to zadanie również wybitny matematyk włoski XVI wieku Nicolo Fontana, znany bardziej pod nazwiskiem Tartaglia.

Treść zadania jest następująca:

Trzech zazdrosnych mężów pragnie przeprawić się ze swymi żonami przez rzekę; mają do rozporządzenia łódkę bez wioślarza, przy tym tak małą, że może ona pomieścić tylko dwie osoby. Należy rozstrzygnąć, w jaki sposób mają się przeprawić, ażeby żadna z pań nie została w towarzystwie innych panów podczas nieobecności swego męża.

Poglądowo a zarazem wesoło rozwiązuje się to śmieszne zadanie za pomocą kart, przy czym rolę owych zazdrosnych mężów biorą na siebie króle, a ich żon — damy.

Wobec szczupłości miejsca oznaczymy królów wielkimi literami A, B, C, a ich żony małymi literami a, b, c.

Początkowo wszyscy znajdują się na jednym brzegu rzeki:

$$Aa,\ Bb,\ Cc.$$

Lecz oto zaczyna się przeprawa.

I. Najpierw przeprawiają się dwie panie:

A	B	C	—	—	—
a	—	—	—	b	c

II. Wraca jedna pani i przewozi trzecią:

A	B	C	—	—	—
—	—	—	a	b	c

III. Powraca jedna z pań, pozostaje z mężem, a dwaj inni mężowie jadą do swych żon:

A	—	—	—	B	C
a	—	—	—	b	c

IV. Mąż z żoną wraca na pierwszy brzeg. Pozostawia tam żonę i zabiera z sobą przyjaciela:

—	—	—	A	B	C
a	b	—	—	—	c

V. Z drugiego brzegu na pierwszy jedzie jedna z pań i przewozi stamtąd przyjaciółkę:

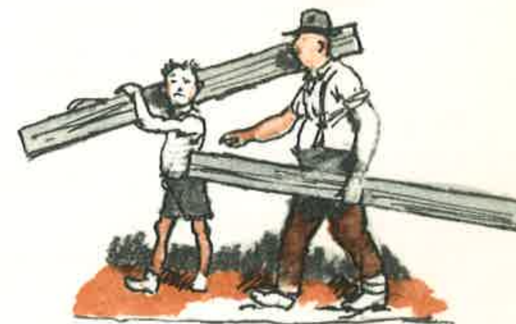
—	—	—	A	B	C
a	—	—	—	b	c

VI. Wreszcie wraca na pierwszy brzeg mąż pozostałej tam pani i ją przewozi:

—	—	—	A	B	C
—	—	—	a	b	c

W ten sposób przeprawa skończyła się ku ogólnemu zadowoleniu.

Warto spróbować rozwiązać to samo zadanie przy czterech królach i damach. Jeśli weźmie się łódkę, w której mogą się zmieścić 3 osoby, przeprawa może być dokonana w pięciu przejazdach, z zachowaniem warunku, iż żadna z pań nie zostanie bez swego męża w obecności innych panów.



52. Przeprawa przez rów

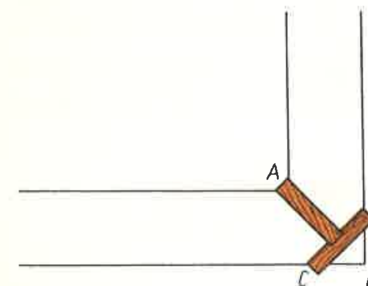
Czworokątne pole otoczone jest rowem jednakowej wszędzie szerokości. Do rozporządzenia są dwie deski, których długość równa się dokładnie szerokości rowu. Należy za pomocą tych desek zbudować przejście przez rów.

Rysunek daje poglądowe rozwiązanie zadania.

Matematyczny dowód możliwości podanej przeprawy wynika z nierówności

$$\sqrt{2} < 1\tfrac{1}{2}$$

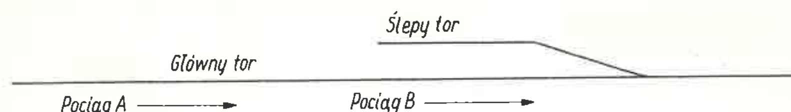
Jeżeli za jednostkę długości przyjmiemy szerokość rowu, to odległość AB wyrazi się liczbą $\sqrt{2}$, czyli około 1,414. Długość deski jest dokładnie równa szerokości rowu, a więc wyraża się liczbą 1. Gdy przy rogu B położymy jedną deskę na ukos, utworzy się trójkąt prostokątny równoramienny BCD i brzeg deski CD będzie od rogu A odległy o $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$, czyli o 0,914 jednostki długości. Stąd wniosek, że można na tej desce ułożyć drugą deskę sięgającą rogu A i na oparcie tej deski po obu jej końcach zostanie jeszcze 0,086 jednostki długości (np. przy deskach trzymetrowych zostanie ponad 25 cm).



53. Manewry pociągów

I. Pociąg *B* zbliża się do małego przystanku, lecz z powodu uszkodzenia parowozu zostaje dopędzony przez pociąg *A*, który musi jechać dalej. Zaznaczamy, że droga kolei żelaznej jest w tym miejscu jednotorowa. Na przystanku odchodzi od głównego toru bocznica, tak zwany tor ślepy, na który można na pewien czas sprowadzić pociąg z głównego toru, ale odnoga ta o tyle jest krótka, że żaden z wymijających się pociągów nie może się zmieścić na niej w całości. Jak należy postąpić, by pociąg *A* mógł jednak jechać dalej?

Rysunek I przedstawia tor kolei żelaznej w pobliżu przystanku:



Rys. I

Po głównym torze w kierunku oznaczonym strzałką jedzie pociąg *B*, a tuż za nim pociąg *A*, który należy przepuścić naprzód. Pociąg *B*, jak zaznaczyliśmy, może pomieścić na bocznicy tylko część swych wagonów. Jak manewrować, by przepuścić pociąg *A*?

Oto rozwiązanie: Pociąg *B* jedzie głównym torem, mija wjazd na bocznicę. Następnie cofa się (ruchem wstecznym) na tę odnogę i zostawia tam tyle wagonów, ile na to pozwoli długość bocznicy; pozostała część pociągu *B* wraz z parowozem jedzie znów naprzód i usuwa się daleko poza początek bocznicy. W ślad za nim posuwa się pociąg *A*; gdy tylko minie początek bocznicy, przyczepia się do jego ostatniego wagonu pozostawione na bocznicy wagony pociągu *B* i pociąg *A* sprowadza je ze ślepego toru, po czym cofa się wraz z nimi, aby dać dostęp do bocznicy reszcie pociągu *B*. Gdy w ten sposób tor główny przed pociągiem *A* zostanie opróżniony, odczepiają odeń wagony pociągu *B* i mknie on ku stacji ze zdwojoną prędkością. Pociąg zaś *B* z przednimi wagonami znów wjeżdża na tor główny, przyczepia stojące na nim wagony i z wolna sunie za pociągiem *A*.

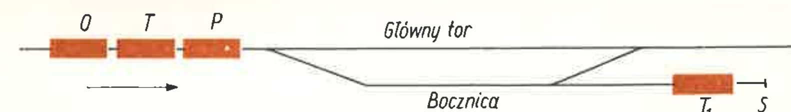
Poszukajcie innego jeszcze rozwiązania! Czy można byłoby zamiast pociągu *B* podzielić na dwie części pociąg *A*?

II. Na nieco większym przystanku obok głównego toru jest tor boczny nie ślepy, lecz połączony w obu końcach zwrotnicami z torem głównym. Nadjeżdżają dwa pociągi z dwóch przeciwnych kierunków. Pociągi te muszą się minąć na tym przystanku (rys. II). Obydwa pociągi są znacznie dłuższe niż bocznica. Jak je przeprawić z najmniejszą ilością manewrów?



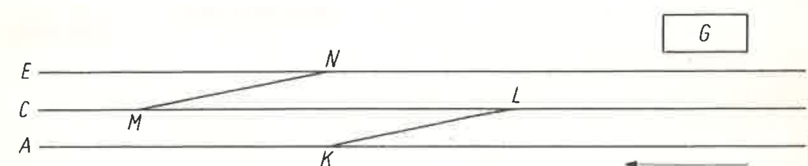
Rys. II

III. Pociąg składający się z parowozu *P*, wagonów towarowych *T* i osobowych *O* znajduje się na stacji mającej tor główny, tor boczny i tor ślepy *S*, na którym stoją wagony towarowe T_1 (rys. III). Należy wagony towarowe z pociągu *T* odstawić na tor ślepy, a stojące tam wagony T_1 przyczepić na miejsce odstawionych, pomiędzy *O* i *P*. Przy manewrowaniu nie można ani na chwilę pozostawić wagonów bez parowozu na linii głównej, spodziewany jest bowiem wkrótce pociąg pośpieszny, do przejazdu którego musi być opróżniony tor główny natychmiast po otrzymaniu sygnałów.



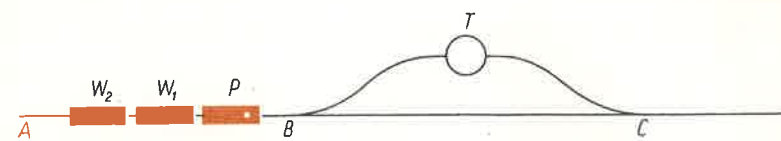
Rys. III

IV. Na linii dwutorowej, przedstawionej na rysunku IV liniami *AB* i *CD*, pociąg towarowy złożony z 21 wagonów idzie po torze *AB* w kierunku oznaczonym strzałką. Pociąg ten powinien pozostawić na dworcu towarowym *G* wagony dziewiąty i dwunasty licząc od parowozu. Jak dokonać tego najmniejszą ilością posunięć?



Rys. IV

V. Na linii *ABCD* znajduje się parowóz *P* z dwoma wagonami W_1 i W_2 (rys. V). Należy zmienić ich ustawienie na wprost przeciwne, tak żeby lokomotywa od punktu *A* ku *D* była pierwsza, a wagony były za nią. W punkcie *T* jest tarcza obrotowa, na której zmieścić się może wagon, ale nie mieści się lokomotywa. Przy rozwiązaniu należy stosować jak najmniej manewrów.



Rys. V



54. Skrzyżowanie się sześciu statków

Po kanale płyną jeden za drugim trzy parostatki: „Śląsk", „Kaszub" i „Polonia". Na ich spotkanie płyną też jeden za drugim trzy statki: „Chrobry", „Warszawa" i „Jadwiga". Kanał jest takiej szerokości, że dwa statki nie mogą się na nim minąć, lecz po jednej stronie kanału znajduje się mała zatoka, w której może się zmieścić jeden statek. Czy statki mogą się wyminąć?

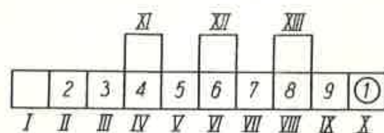
Oto poglądowe odtworzenie statków, kanału i zatoki:



Statki „Kaszub" i „Polonia" cofają się (na rysunku na lewo), a „Śląsk" wpływa w zatokę. „Chrobry", „Warszawa" i „Jadwiga" płyną kanałem naprzód i mijają „Śląsk". Wówczas „Śląsk" opuszcza zatokę i płynie w swym kierunku (na rysunku na prawo). „Jadwiga", „Warszawa" i „Chrobry" cofają się na swe poprzednie miejsca (na prawo) i wówczas „Kaszub" wykonuje manewr „Śląska". Następnie w taki sam sposób przejeżdża i „Polonia". Statki mogą teraz płynąć spokojnie dalej do miejsca przeznaczenia.

55. W okopach

W okopach na froncie, w obliczu nieprzyjaciela, umieściło się dziewięciu żołnierzy z oficerem, który przy zajmowaniu tak niebezpiecznej pozycji zajął stanowisko na prawym skrzydle. Musi jednak z pewnych względów znaleźć się na miejscu skrajnym lewym. Okop jest tak wąski i ciasny, że nie można myśleć o przesunięciu się poza żołnierzami. Na zewnątrz nie sposób wysunąć głowy, bo pociski nieprzyjacielskie gęsto padają szukając ofiar.



Na szczęście w okopie są trzy wgłębienia, w których może chwilowo stanąć jeden człowiek.

Jak powinni poruszać się żołnierze, ażeby oficer przedostał się wzdłuż całego rowu strzeleckiego i stanął z lewej strony szeregu?

Okazuje się, że żołnierze i oficer wykonać będą musieli nie mniej niż 28 przesunięć. Oto one:

2 — I	9 — VII	5 — VII	3 — III
3 — II	1 — XIII	1 — XI	4 — IV
4 — III	9 — X	4 — XII	5 — V
5 — XI	8 — IX	3 — VI	6 — VI
6 — IV	1 — XII	2 — V	7 — VII
7 — V	7 — XIII	1 — I	8 — VIII
8 — VI	6 — VIII	2 — II	9 — IX

A może zdołacie odnaleźć krótsze rozwiązanie? Spróbujcie nakreśliwszy na kawałku papieru odpowiednie kratki i ułożywszy w nich krążki.

56. Grobowiec Diofantosa

Na kamieniu grobowym wielkiego matematyka greckiego z epoki aleksandryjskiej Diofantosa widniał ułożony przez Eutropiusza napis tej treści:

Przechodniu! Pod tym kamieniem spoczywają prochy Diofantosa, który zmarł w głębokiej starości. Przez szóstą część swego długiego życia był dzieckiem, a dwunastą młodzieńcem. Przez następną siódmą część życia był nieżonatym. W pięć lat po pojęciu małżonki urodził się syn, który dożył do wieku dwakroć mniejszego od lat ojca. W cztery lata po śmierci syna zasnął snem wiecznym Diofantos, opłakiwany przez swych najbliższych. Powiedz, jeśli umiesz obliczyć, w jakim umarł on wieku?

Do czasu ożenienia się przeżył Diofantos $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7}$ swego życia, czyli razem $\frac{33}{84}$. Z synem przeżył połowę swego życia, to znaczy $\frac{42}{84}$ całego życia. Reszta życia, która upłynęła od ślubu do urodzin syna i od śmierci syna do zgonu Diofantosa, równa się $\frac{9}{84}$, a wynosiła $5 + 4 = 9$ lat. Diofantos zmarł więc mając 84 lata.



57. Kot i szczur

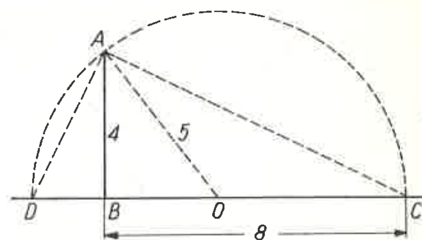
(Zadanie hinduskie z VII wieku)

Kot wdrapał się na mur wysokości 4 łokci, skąd dostrzegł szczura myszkującego o 8 łokci od podstawy muru. Szczur również dojrzał kota i popędził ku swej kryjówce znajdującej się w fundamencie muru. Kot skoczył



z muru i przeleciał w powietrzu po przekątnej tę samą odległość, jaką szczur przebiegł po ziemi. Udało mu się złapać szczura. W którym punkcie owych 8 łokci został szczur schwytany i jaką odległość przebiegł czworonożny łowca a jaką przebiegł szczur? Odpowiedz mi, dostojny panie, jeśli nie są ci obce obliczenia koła.

Oznaczamy przez A i C punkty, w których początkowo znajdowały się kot i szczur; przez AB — pionowy mur; przez BC — poziomą odległość szczura od muru; przez O — punkt schwytania. Wiemy tedy, że $AO = OC$. Punkt O, którego położenie należy ustalić, jest środkiem koła przechodzącego przez A i C.



Niech D będzie punktem, w którym okrąg tego koła przecina linię BC. Trójkąt CAD, jako wpisany w półkole, jest prostokątny, a w trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest średnią geometryczną odcinków tej przeciwprostokątnej:

$$AB^2 = BD \cdot BC,$$

czyli

$$BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{4^2}{8} = 2$$

Stąd wnioskujemy, że

$$DC = 2 + 8 = 10, \quad OC = 5 \quad \text{i} \quad OB = 3.$$

Szczur przebiegł więc 5 łokci przed fatalnym dla siebie spotkaniem.



58. Kot i mysz

Luca Paciuolo w swej książce pod tytułem *Summa de arithmetica* 1494 r.) podaje zadanie następujące: Na szczycie drzewa 60-łokciowej wysokości siedzi mysz; przy pniu na ziemi siedzi kot. Mysz złazi co dzień o $\frac{1}{2}$ łokcia w dół, a co noc o $\frac{1}{6}$ łokcia włazi z prowotem do góry. Kot wspina się w ciągu dnia o 1 łokieć w górę, a w ciągu każdej nocy złazi o $\frac{1}{4}$ łokcia na dół. Drzewo rośnie tak, że każdego dnia jest o $\frac{1}{4}$ łokcia wyższe, w ciągu nocy zaś kurczy się w swej wysokości o $\frac{1}{8}$ łokcia.

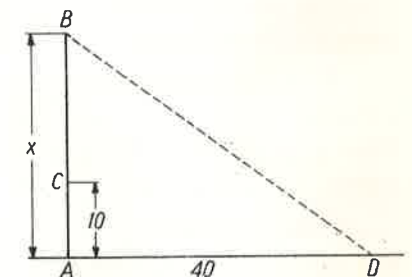
Kiedy dojdzie kot do myszy i jak wysokie będzie wówczas drzewo?

Odpowiedź: W ciągu 63 dni. Drzewo będzie wówczas miało 68 łokci wysokości. (Zachodzi tylko pytanie, czym się zwierzaki żywiły przez 9 tygodni i czy im się nie sprzykrzyła cała ta zabawa).

59. Małpi skok

(Z *Lilavati*, wiek XII)

Dwie małpy siedziały na drzewie: jedna na samym jego wierzchołku druga na wysokości 10 łokci od ziemi. Druga małpa chcąc napić się wody w źródle odległym o 40 łokci zlazła z drzewa; w tymże czasie pierwsza małpa skoczyła z wierzchołka wprost do tego samego źródła po przeciwprostokątnej. Przestrzeń przebyta przez małpy była jednakowa. Powiedz mi szybko, człowieku światły, z jakiej wysokości małpa ta skoczyła, a zobaczę, ile masz sprawności w obliczaniu.



Odpowiedź na str. 306.

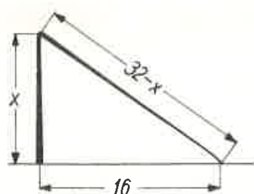
60. Złamany bambus

(Z *Lilavati*, wiek XII)

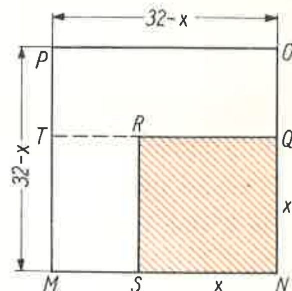
Trzcina bambusowa, mająca 32 łokcie i wznosząca się na równinie, została w jednym miejscu złamana przez wiatr; wierzchołek jej dotknął ziemi o 16 łokci od podstawy. Powiedz mi, matematyku biegły, ile łokci nad ziemią została złamana trzcina bambusowa?



Rys. I



Rys. II



Rys. III

Przypuśćmy, że trzcina została złamana na wysokości x łokci nad ziemią. Z trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych x i 16 oraz przeciwprostokątnej $32 - x$ mamy równanie

$$(32 - x)^2 = x^2 + 16^2$$

Jest to równanie kwadratowe. Ale można obliczyć x bez stosowania wzoru na rozwiązanie równania kwadratowego.

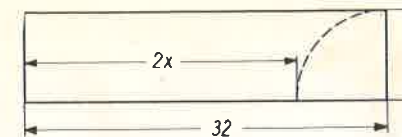
Napiszmy równanie powyższe w postaci

$$(32 - x)^2 - x^2 = 16^2$$

Na rysunku III zbudowaliśmy kwadrat *MNOP*, którego bok równy będzie $32 - x$. Umieszczamy w nim kwadrat *SNQR* o boku x, co można uczynić, gdyż z rysunku II widać, że x jest mniejsze niż $32 - x$. Według naszego równania część jasna, nie zaliniowana kwadratu *MNOP*, wynosi 16^2.

Powierzchnia ta składa się z dwóch prostokątów: prostokąta *MSRT* o bokach x i $32 - 2x$ oraz prostokąta *TQOP* o bokach $32 - x$ i $32 - 2x$. Dwa te prostokąty można zamienić na prostokąt o wysokości $32 - 2x$ i podstawie $x + (32 - x)$, czyli 32.

Otóż ten prostokąt jest równoważny kwadratowi 16×16, a tym samym jest równoważny prostokątowi 32×8.



Rys. IV

Z równości prostokątów o jednakowej podstawie (równej 32) wnosimy, że wysokość $32 - 2x$ i 8 muszą być równe, i z rysunku IV widzimy od razu, że $2x$ równa się $32 - 8$, czyli 24, a więc x równa się 12.

Bambus złamał się na wysokości 12 łokci nad ziemią.

61. Łodyga lotosu

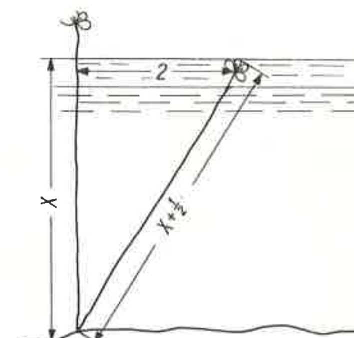
(Z *Lilavati*, wiek XII)



Nad powierzchnią jeziora nawiedzanego przez liczne stada flamingów i żurawi wynurza się koniec łodygi lotosu, który wznosi się na pół łokcia nad wodą. Pod działaniem wiatru łodyga stopniowo się pochyla i zanurza, aż wreszcie niknie pod wodą w odległości 2 łokci od miejsca, w którym wyrosła. Oblicz szybko, matematyku szybkomyślny, głębokość wody, a trafność swej odpowiedzi sprawdź na stronicy 306.

Pewną, nieco bardziej skomplikowaną odmianą powyższego jest starochińskie zadanie tej treści:

Pośrodku kwadratowej sadzawki liczącej po 10 stóp w obu kierunkach rośnie krzak lilii wodnej, której kwiat wynurza się na stopę ponad powierzchnię wody. Gdy go się przychyli ku środkowi któregokolwiek brzegu, skryje się pod wodą. Jak głęboka jest woda?





62. Trudne zadanie

Zadanie poniższe przytacza wielki matematyk chiński Cin-Kin-Czang w dziele *Su-szou-kin-czang*, co znaczy: „Dziewięć działów sztuki liczbowej".

Do trzech beczek wsypano jednakową ilość ryżu. Do składu dobrali się złodzieje i z każdej beczki ukradli znaczną część jej zawartości. Nie wiadomo, ile było ryżu uprzednio; wiadomo natomiast, że pozostało:

w I beczce ... 1 ho
w II beczce ... 1 szyng i 1 ho
w III beczce ... 1 ho

Gdy złodziei pochwycono, jeden z nich zeznał, iż czerpał z pierwszej beczki czerpakiem, drugi z drugiej beczki — drewnianym chodakiem, trzeci zaś z trzeciej beczki — miseczką. Przekonano się, że

czerpak	mieści	1 szyng i 1 ho
chodak	„	1 szyng i 7 ho
miseczka	„	1 szyng i 3 ho

i że każda z beczek zawiera najwyżej 3 szy. Wiadomo wreszcie, że 10 ho = 1 szyng, 10 szyng = 1 tau, 10 tau = 1 szy.

Ile każdy ze złodziei wyniósł ryżu?

Wystarczy odszukać jednakową zawartość 3 beczek. Otóż przeliczając pozostałą ilość ryżu i pojemność naczyń, którymi czerpano — na miarę ho, widzimy, iż w pierwszej beczce zostało 1 ho, w drugiej 11 ho, w trzeciej 1 ho; czerpak zawierał 11 ho, chodak — 17 ho, a miseczka — 13 ho. Zadanie sprowadza się do odszukania liczby, która by była wielokrotnością liczby 11 powiekszoną o 1, a także wielokrotnością liczby 17 powiększoną o 11, wreszcie wielokrotnością liczby 13 powiększoną o 1. Jeśliby zawartość każdej z trzech beczek była o 1 ho mniejsza, to pierwszy złodziej czerpakiem o pojemności 11 ho wyczerpałby pierwszą beczkę do dna i tak samo trzeci złodziej swoją miseczką o pojemności 13 ho wyczerpałby trzecią beczkę do dna, a drugi złodziej czerpiąc chodakiem o pojemności 17 ho zostawiłby w drugiej beczce 10 ho ryżu. Tak więc trzeba by znaleźć liczbę, która dzieli się bez reszty przez 11, dzieli się również bez reszty przez 13, a przy dzieleniu przez 17

daje resztę 10. Powiększając znalezioną liczbę o 1 dowiemy się, ile ho ryżu zawierała pierwotnie każda beczka.

Aby liczba dzieliła się bez reszty przez 11 i przez 13, musi się dzielić bez reszty przez iloczyn $11 \cdot 13$, czyli przez 143. Każda wielokrotność liczby 143 dzieli się przez 11 i 13. Wypisujemy ciąg kolejnych wielokrotności liczby 143:

143, 286, 429, 572, 715, 858, 1001, 1144

i w tym ciągu szukamy wyrazu, który by w dzieleniu przez 17 dał resztę 10. Dzielimy kolejne liczby naszego ciągu przez 17 i wypisujemy otrzymane reszty:

7, 14, 4, 11, 1, 8, 15, 5

Dość! Liczba 1144 daje resztę 5, a więc liczba $1144 + 1144 = 2288$ da resztę $5 + 5 = 10$. W ten sposób znaleźliśmy liczbę, która dzieli się przez 11 i przez 13, a przy dzieleniu przez 17 daje resztę 10.

Każda z trzech beczek zawierała $2288 + 1$, czyli 2289 ho.

Jest to pierwsza z liczb, które odpowiadają oznaczonym wyżej warunkom. Odszukaniem jednak innych, większych, nie potrzebujemy się zajmować, gdyż wiemy, że żadna z beczek nie mieściła więcej niż 3000 ho.

Każda beczka zawierała więc 2289 ho ryżu, a zatem pierwszy i trzeci złodziej ukradli po $2289 - 1 = 2288$ ho, czyli 2 szy, 2 tau, 8 szyng, 8 ho; drugi złodziej ukradł 2278 ho, czyli 2 szy, 2 tau, 7 szyng, 8 ho.

Pierwszy czerpał swym czerpakiem 208 razy, drugi drewniakiem 134 razy, trzeci miseczką 176 razy.

63. Gracje i muzy

(Zadanie starogreckie)

Trzy gracje niosą jabłka, każda ma jednakową ich ilość. Spotykają dziewięć muz, na ich prośbę obdarzają każdą muzę jednakową ilością jabłek. Po podziale każda gracja i każda muza miała tę samą ilość jabłek.

Ile jabłek miała każda z gracji przed podziałem?

Wszystkie boginie, a było ich 12, miały po podziale jednakową ilość jabłek, ogólna więc liczba jabłek musi być wielokrotnością liczby 12, z czego wynika, że każda z trzech gracyj miała przed podziałem liczbę jabłek podzielną przez 4.

Wiemy przy tym, że każda gracja obdarzyła dziewięć muz jednakową ilością jabłek, czyli ilość ta musi być nie mniejsza od 9. Pierwsza wielokrotność liczby 4 większa od 9 jest 12. Liczba ta będzie liczbą poszukiwaną, gdyż jeśli każda gracja da jedno jabłko każdej muzie, to każdej gracji zostaną 3 jabłka i każda z muz otrzyma 3 jabłka — po jednym jabłku od każdej gracji.

Podobnie też wszystkie wielokrotności liczby 12 odpowiadają warunkom zadania, więc 24, 36 i tak dalej.

64. Woły Newtona

Trzy woły w ciągu 2 tygodni zjadły trawę z 2 morgów łąki oraz trawę, która na tych dwóch morgach w tym czasie wyrosła.

Dwa woły zjadły w ciągu 4 tygodni trawę z 2 morgów łąki oraz trawę, która na tych dwóch morgach w czasie 4 tygodni wyrosła.

Ile potrzeba by było wołów, żeby zjadły trawę z 6 morgów oraz trawę, która wyrosłaby na owych sześciu morgach w przeciągu 6 tygodni?

Przypuszczamy, że trawa rośnie wszędzie jednakowo i że wszystkie woły jednakowo się pasą.

W swym dziele *Arithmetica universalis* (r. 1707) Newton podaje to oryginalne zadanie i następnie je rozwiązuje. Nie przytaczamy tu jednak rozwiązania sławnego matematyka, jest ono bowiem zbyt trudne. Zresztą zmieniliśmy nawet nieco dane zadania, by je ułatwić Czytelnikowi, zachowując jedynie jego zasadę.

Przyjmijmy dla uproszczenia za jednostkę przyrostu ilość trawy, jaka urośnie na jednym morgu w ciągu jednego tygodnia.

Wówczas zadanie przedstawia się jak następuje:

(1) 3 woły w 2 tygodnie zjadają trawę z 2 morgów i 4 jednostki przyrostu.

(2) 2 woły w 4 tygodnie zjadają trawę z 2 morgów i 8 jednostek przyrostu.

Ile wołów w 6 tygodni zje trawę z 6 morgów i 36 jednostek przyrostu?

Otóż z warunku (2) można wyciągnąć wniosek, że

1 wół w 4 tygodnie zjada trawę z 1 morga i 4 jednostki przyrostu,

i dalej:

(3) 3 woły w 4 tygodnie zjadają trawę z 3 morgów i 12 jednostek przyrostu.

Podwajając okres czasu w warunku (1) otrzymujemy, że

(4) 3 woły w 4 tygodnie zjadają trawę z 4 morgów i 8 jednostek przyrostu,

przy czym zauważyć należy, że w tym przypadku woły nie zjedzą całego przyrostu trawy na czterech morgach.

Z zestawienia warunków (3) i (4) wynika, że trawa z 1 morga jest równoważna 4 jednostkom przyrostu. Korzystając z tego przeliczenia możemy warunek (1) wypowiedzieć w postaci:

3 woły w 2 tygodnie zjadają $2 \cdot 4 + 4$, czyli 12 jednostek przyrostu, a więc na jednego wołu potrzeba 2 jednostek przyrostu tygodniowo.

Ten sam wynik moglibyśmy otrzymać z warunku (2). Zadanie polega na tym, by obliczyć, ile wołów zje w ciągu 6 tygodni trawę z 6 morgów i 36 jednostek przyrostu. Przeliczając całą trawę na jednostki przyrostu otrzymamy $6 \cdot 4 + 36 = 60$ jednostek przyrostu. Daje to 10 jednostek tygodniowo, a to wystarczy dla 5 wołów.



IZAAK NEWTON

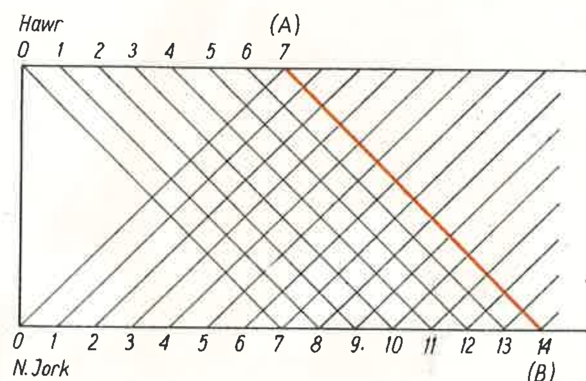
65. Słynne zadanie Lucasa

W czasie kongresu naukowego podczas śniadania, na którym było obecnych wielu sławnych matematyków różnych narodowości, znakomity matematyk francuski Edward Lucas zapowiedział zebranym kolegom, że chce zadać im jedno z trudniejszych pytań:

„Zakładam, że co dzień w południe wyrusza z Hawru do Nowego Jorku statek i że w tym samym czasie statek tego samego towarzystwa wypływa z Nowego Jorku do Hawru. Przejazd trwa w tę i tamtą stronę równo 7 dni. Ile statków danego towarzystwa, idących w przeciwnym kierunku, spotka statek wyruszający dzisiaj w południe z Hawru?"

Niektórzy z obecnych, zaliczający się do sław na polu matematyki — opowiada o tym zdarzeniu Lucas w swych *Récréations mathématiques* — zawołali bez wielkiego namysłu: „Siedem!" Większość jednak zachowała milczenie. Nikt nie dał prawidłowej odpowiedzi. Gdyby jednak powołać do pomocy graficzne przedstawienie podane na poniższym rysunku, to rozwiązanie przedstawiałoby się wówczas z całą jasnością.

Zebrani brali oczywiście pod uwagę w zadaniu Lucasa tylko statki, które miały dopiero wyruszyć w podróż, zapominając o tych, które już były w drodze.

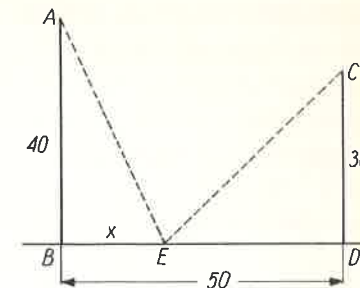


Wykres wykazuje poglądowo, że statek, którego linia przejazdu oznaczona jest literami *AB*, spotka 13 statków na morzu oraz jeden, który wpływa do portu Hawr w chwili jego odjazdu, i jeszcze jeden, który wyjeżdża z Nowego Jorku w chwili jego przybycia, czyli razem 15 statków. Wykres jednocześnie wykazuje, że dany statek codziennie w południe i o północy krzyżuje się z innym statkiem.

Jeśliby ktoś wątpił w ogromne korzyści, jakie oddają wykresy, to powyższe rozwiązanie zadania powinno rozwiać wszelkie wątpliwości. Zagadnienie skomplikowane staje się w takim oświetleniu proste, prawie oczywiste.

66. Problemat Leonarda z Pizy

(Z *Liber abaci*, wiek XIII)



Dwie wieżyce, jedna wysokości 30 stóp, druga 40 stóp, oddalone są od siebie o 50 stóp. Pomiędzy nimi znajduje się wodotrysk, do którego zlatują dwa ptaki z wierzchołków obu wieżyc i lecąc z jednakową prędkością przybywają w tym samym czasie. Jakie są odległości poziome wodotrysku od dwóch wieżyc?

Rozwiązanie jest łatwe. Jak je przeprowadzić? Odpowiedź na str. 306.

67. Pająk i mucha

Pokój ma 30 stóp długości, 12 stóp szerokości i 12 stóp wysokości. Na linii pionowej przechodzącej przez środek jednej z krótszych ścian, w odległości jednej stopy od sufitu, znajduje się pająk; na prostopadłej przechodzącej przez środek przeciwległej ściany, na wysokości 1 stopy licząc od podłogi znajduje się mucha. Pająk dosięga muchy, która obezwładniona strachem, nie próbuje nawet ucieczki.

Zadanie polega na tym, by znaleźć najkrótszą drogę, jaką ma przebyć pająk biegnąc do swej zdobyczy..

Najszybciej zadanie to rozwiązać można metodą graficzną.

Oto diagram odpowiadający rozwiązaniu tego zagadnienia. Prostokąt *A* oznacza podłogę, *B* i *D* — dłuższe ściany boczne, *C* — sufit, *E* i *F* — punkty, w których znajdowały się początkowo pająk i mucha na dwóch krótszych ścianach.

Jeśli linię *EF*, po której przebiega pająk, przyjmiemy za przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym *EFN*, to oczywiście $EF^2 = NF^2 + NE^2$.

Ale odległości *NF* i *NE* łatwo obliczyć; równają się one mianowicie 24 i 32 stopom. Stąd $EF = 40$ stopom.



68. Fenomenalni rachmistrze

We wszystkich niemal krajach psychologowie z wielkim zainteresowaniem studiują objawy niezwykłej pamięci, zwłaszcza pamięci matematycznej.

W ciekawej książce zatytułowanej *Mathématiques et mathématiciens*, wydanej w Paryżu w r. 1920, A. Rebière przytacza jako cieszącego się największą tego rodzaju sławą słynnego Inaudiego. Inaudi liczył wówczas lat pięćdziesiąt kilka. Chętnie poddawał się licznym seansom eksperymentalnym. Odznaczał się wprost fenomenalną pamięcią, przy tym nie wzrokową (co jest częstszym zjawiskiem), lecz słuchową. Wprowadził on na jednym z seansów w prawdziwy zachwyt słuchaczy rekrutujących się z grona profesorów paryskiej Szkoły Politechnicznej i Akademii Nauk. Z ogromną sprawnością wykonywał odejmowanie dwóch liczb, z których każda miała po 21 cyfr (!), przy czym liczby te nie były napisane, lecz tylko ustnie wymienione; wysoce ciekawym zjawiskiem było, że wynik działania mógł eksperymentator z równą szybkością podać w porządku przyjętym, tj. poczynając od setek trylionów, jak i w porządku odwrotnym, dyktując od jedności. Bez namysłu niemal oznaczał dzień tygodnia podanej mu daty, np. 16 czerwca 1862. Zdolność obliczania uzupełnia się u Inaudiego pamięcią cyfr zgoła zdumiewającą. Oto przy końcu jednego seansu powtórzył on z pamięci wszystkie liczby, którymi operował w czasie owego seansu, a była ich ... długa kolumna.

W pierwszej ćwierci XX wieku na czoło mnemotechników cieszących się wszechświatową sławą wysunął się nasz rodak N. Lipowski, który w Anglii święcił prawdziwe triumfy. Najtrudniejsze zadania rozwiązywał bez najmniejszego natężenia umysłu i w mgnieniu oka. Znany psycholog angielski Spearman wziął Lipowskiego pod obserwację i przeprowadził z nim szereg doświadczeń. Zgromadził na przykład w pokoju kilkadziesiąt osób, wypisał na kartce ich nazwiska i raz jeden odczytał Lipowskiemu, który powtórzył je natychmiast, i to w porządku odwrotnym. Lipowski potrafił, podobnie jak Inaudi, ustalić dzień tygodnia każdej podanej mu daty, nie potrzebował więc posiłkować się kalendarzem, gdyż doszedł do tego, że dni roku ubiegłego i następnego określał w ciągu sekundy.

Dodajmy na zakończenie, że gdy Lipowski przyjechał do Londynu, nie umiał po angielsku ani słowa. W ciągu paru dni zaczął mówić używając wyrazów, które przez ten krótki czas usłyszał i zrozumiał.

Umysł Lipowskiego — i w ogóle fenomenalnych mnemotechników — jest podobny do kamery fotograficznej. Zatrzymuje w sobie wszystko, co się w nim odbije, i zachowuje na dłuższy przeciąg czasu.

W dzieciństwie Gauss i Ampère znani byli z fenomenalnej pamięci w zakresie liczb i wyjątkowej biegłości obliczania. Z wiekiem, gdy obaj wielcy matematycy pogrążyli się w badaniach naukowych, zdolność ich w tym kierunku zaczęła zanikać.

69. Tajemnicze numery telefonów

Pewien wiedeński matematyk poprosił znajomą młodą panienkę, by podała mu numer telefonu, przez który można by było z nią porozmawiać. Panienka nie bardzo sobie życząc tej rozmowy odpowiedziała żartobliwie, że w biurze, gdzie pracuje, są cztery telefony; w każdym numerze telefonu wszystkie cyfry są różne, ale te cztery numery mają pewne wspólne właściwości, mianowicie: suma cyfr każdego numeru równa się 10, gdy zaś do każdego z tych numerów dodamy numer napisany tymi samymi cyframi, lecz w odwrotnym porządku, to otrzymamy cztery liczby zupełnie jednakowe i jednakocyfrowe.

— Niech panu to wystarczy — zakończyła, żegnając się z nieco złośliwym uśmieszkiem.



Była przekonana, że oczywiście z tak ogólnikowych wskazówek nikt nie będzie mógł „być mądrym". Stało się jednak inaczej i ku wielkiemu zdziwieniu złośliwej panienki wkrótce odezwał się w jednym z jej telefonów głos owego nudnego jegomościa.

W jaki sposób mógł on ... odgadnąć te tajemnicze numery?

Otóż matematyk ów wiedział, że wszystkie telefony wiedeńskie mają numery zawarte między 20 000 a 99 999.

Przypuśćmy, że jeden z telefonów biura ma numer *ABCDE*, gdzie literami oznaczone są kolejne cyfry. Zgodnie z warunkiem zadania suma danego numeru i numeru z odwróconym porządkiem cyfr ma być liczbą „jednakocyfrową":

$$\begin{array}{r} ABCDE \\ +EDCBA \\ \hline FFFFF \end{array}$$

A to jest tylko wtedy możliwe, gdy $E + A = A + E = F$, $D + B = B + D = F$ i $C + C = F$.

Ponadto wiemy, że $A + B + C + D + E = 10$; z tego wniosek, że $F = 4$ i $C = 2$.

Cyfra A może być 3 lub 4. Teraz łatwo odcyfrować numery czterech telefonów:

30241, 34201, 41230, 43210.

70. Dziwnym trafem...

Dziewięć cyfr od 1 do 9 wypisano na dziewięciu kartkach i rozdano trzem osobom. Każda osoba ułożyła z otrzymanych trzech kart liczbę trzycyfrową możliwie najmniejszą, to znaczy iż na miejscu setek postawiła najniższą posiadaną cyfrę, na miejscu dziesiątek — wyższą, a na miejscu jedności — najwyższą. Po ułożeniu owych liczb wszystkie trzy osoby odczytały je głośno i zapisały. Okazało się wówczas, że suma cyfr wszystkich trzech liczb była dziwnym trafem jednakowa. Zmieszano potem kartki i ponownie rozdano po trzy. Każdy z uczestników tej zabawy otrzymał przypadkowo jedną z kart poprzednio posiadanych i dwie nowe. I znowu dziwnym zaiste trafem sumy cyfr były jednakowe, a co jeszcze ciekawsze, u każdej z osób liczba ułożona poprzednio i liczba ułożona obecnie dawały tę samą sumę 516.

Jakie cyfry otrzymał każdy przy pierwszym i drugim rozdaniu?

Suma pierwszych dziewięciu liczb $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$. Więc suma cyfr przy pierwszym i drugim rozdaniu u każdego z obecnych musiała wynosić 15. Na miejscu jedności w poszukiwanych liczbach nie mogły stać cyfry 1, 2, 3, 4 ani 5, gdyż wówczas nawet największa liczba trzycyfrowa, jaką by można według podanych zasad ułożyć (345), daje w sumie cyfr 12.

Suma liczb (516) kończy się na 6, więc jedności w liczbach sumowanych musiały być reprezentowane przez 7 i 9 albo przez 8 i 8. Dla dziesiątek i setek zostały cyfry od 1 do 6.

Lecz $7 + 9 = 8 + 8 = 16$; $516 - 16 = 500$. Poszukiwana więc przez nas suma dziesiątek daje 0, to znaczy że na drugim miejscu musiały stać cyfry 4 i 6 albo 5 i 5. Suma setek wobec tego równa się 4, więc na miejscu setek stały 1 i 3 albo 2 i 2.

U każdej osoby w obu liczbach powtarzała się jedna cyfra: jeżeli powtórzyła się 8, to dziesiątkami mogły być tylko 4 i 6, a setkami 3 i 1; stąd liczby: 348 i 168. Jeśli u drugiej osoby powtórzyła się 5, to jednościami mogły być tylko 7 i 9, a setkami 1 i 3; stąd liczby 159 i 357. U trzeciej osoby powtórzyła się 2, dziesiątkami były więc 4 i 6, jednościami 9 i 7; były więc liczby 267 i 249.

Zróbmy zestawienie liczb:

za pierwszym razem	348	159	267
za drugim razem	168	357	249
	516	516	516



71. Jeże i żółwie

Dwa jeże urządziły wyścig. Jeden na swej drodze nie napotkał żadnej przeszkody, drugi natomiast spotkał w drodze kolejno dwa ogromne żółwie: trzeba było je albo ominąć, albo po nich przebiec. Jeż zdecydował się na to drugie. Pierwszy żółw, długi na metr, posuwał się w kierunku przeciwnym do biegu jeża, przechodząc 6 cm w ciągu sekundy; drugi zaś, mniejszy, długości $\frac{1}{2}$ m, szedł w tym samym kierunku, co jeż, z prędkością 18 cm na sekundę.

Oba jeże przybyły ostatecznie do mety równocześnie. Jak rozstrzygnąć, który był lepszym biegaczem?

Pierwszy żółw oczywiście opóźnił bieg jeża, gdyż w czasie, kiedy ten przebiegał mu po grzbiecie, co trwało jakieś t sekund, żółw uszedł w kierunku przeciwnym $6t$ centymetrów. Po drugim żółwiu jeż przebiegł w czasie $\frac{1}{2}t$ sekund i w tym przebiegu zyskał pewną przestrzeń, gdyż żółw uniósł go naprzód: zyskał mianowicie $18 \cdot \frac{1}{2}t = 9t$ cm. Ogółem więc jeż zyskał na obu żółwiach $3t$ centymetrów. Lepszym tedy biegaczem był ów jeż, który nie miał po drodze żadnych przygód.

72. Niecierpliwy przechodzień

Pewien przechodzień mijał szereg wozów naładowanych drzewem i bardzo powoli posuwających się naprzód. Na jednym z nich leżały ogromnej długości pnie jodeł. Ciekawego jegomościa zainteresowało, ile też kroków liczyć może taki pień, iście masztowy. Każdy „zwykły" człowiek doczekałby się oczywiście chwili, gdy wozy choć na krótko przystaną, i szybko a bez trudu byłby wówczas swą ciekawość zaspokoił. Ale przechodzień ów był matematykiem, matematycy zaś — jak wiadomo — nie odznaczają się cierpliwością. Postanowił więc pożądany wymiar uzyskać w inny sposób. Zaczął wymijać wóz i liczył, ile kroków uczyni, przechodząc w ten sposób od jednego końca jodły do drugiego; wypadło 112 kroków. Następnie zawrócił i szedł w kierunku przeciwnym do ruchu wozu: wówczas pień „skończył się" po 16 zaledwie krokach. Otrzymawszy te dwie liczby matematyk mógł już na zasadzie krótkiego rozumowania algebraicznego osiągnąć pożądany wynik.

Jeśli oznaczymy długość pnia przez x, tę zaś przestrzeń, którą wóz podczas każdego kroku przechodnia ujechał naprzód — przez y, to mijając całą długość jadącego pnia przechodzień musiał przejść drogę $x + 112y$, a to właśnie równa się 112 jego krokom.

W powrotnej drodze przechodnia w czasie każdego jego kroku wóz przesuwał się naprzód o ten sam dystans y. Długość więc pnia x równać się będzie 16 krokom $+ 16y$. Z dwóch równań

$$\begin{cases} x + 112y = 112 \\ x = 16 + 16y \end{cases}$$

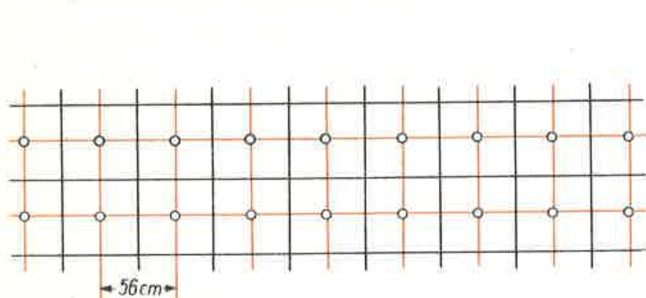
obliczymy, że poszukiwana miara długości pnia wynosi 28 kroków.

73. O najkorzystniejszym sposobie sadzenia ziemniaków

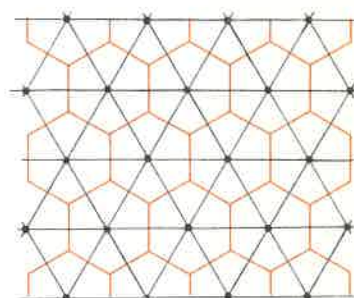
Aby ziemniaki wydały maksimum plonu, należy je sadzić w pewnej stałej odległości przepisanej przez naukę opartą na wieloletnim doświadczeniu. Chodzi jednak o to, jakie będzie najkorzystniejsze ich rozmieszczenie na polu. I w tej sprawie ma coś do powiedzenia nie tylko agronomia, lecz i matematyka.

Jak wiadomo, istnieją trzy takie wielokąty, na które można rozbić bez przerw i luk płaszczyznę, mianowicie: trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Tylko więc te trzy rodzaje wzajemnego rozmieszczenia ziemniaków można brać pod uwagę. Że przy stosowaniu sześciokąta (wobec koniecznego stałego minimum odległości między ziemniakami) gleba nie będzie dostatecznie wyzyskana, to jest prawie oczywiste. Wątpliwość może powstać tylko przy wyborze trójkąta lub kwadratu. W każdym z tych wielokątów umieścimy pośrodku jedną roślinę, przy czym dobierzemy wymiary prostokątów w taki sposób, by odległość między najbliższymi siebie roślinami miała przepisową wielkość, np. $d = 56$ cm. (Gdyby ktoś chciał przeprowadzić obliczenia dla innej wartości d, nie będzie miał większego kłopotu).

Przy sadzeniu ziemniaków w „kwadrat", jak pokazuje rysunek I, musimy rozmieścić rzędy w odstępach po 56 cm i w każdym rzędzie sadzić rośliny co 56 cm. Na każdą roślinę przypadnie $56 \cdot 56 = 3136$ cm² gruntu, a na jednym arze (10 × 10 m) posadzimy 1 000 000 : 3136 = 319 roślin.



Rys. I



Rys. II

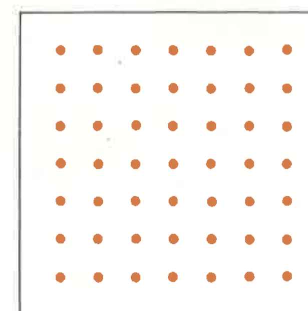
Rozważmy jeszcze sposób sadzenia ziemniaków w wierzchołkach trójkątów równobocznych (rys. II).

Przy tym sposobie sadzenia na każdą roślinę przypadnie sześciokąt foremny, w którym odległość środka od boków wynosić będzie 28 cm. Cały ów sześciokąt foremny można rozbić na 6 trójkątów równobocznych.

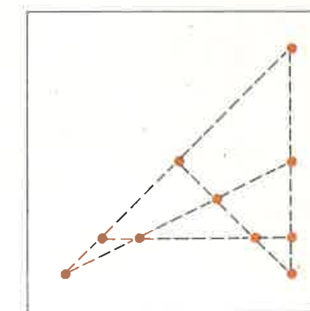
W każdym z tych trójkątów wysokość wynosi 28 cm, a bok — jak łatwo obliczyć — około 32 cm. Pole takiego małego trójkąta wynosi $\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 28 = 448$ cm², a pole całego sześciokąta foremnego zajmuje $6 \cdot 448 = 2688$ cm². Na jednym arze można wysadzić 1 000 000 : 2688 = 372 rośliny, czyli więcej niż przy sadzeniu w kwadrat.

74. Sprzedaż starych grusz

Pewien właściciel sadu zdecydował się sprzedać część starych grusz na wyrąb. Wydzielił więc wielki kwadrat mieszczący 49 drzew (rys. I) i zawarł umowę z nabywcą drzew w tym sensie, że pozostawi on nietknięte drzewa w pięciu rzędach tak, aby w każdym rzędzie były 4 drzewa, resztę zaś drzew nabywca wytnie i wykarczuje. Właściciel sadu sądził, że pozostanie mu 20 grusz. Tymczasem sprytny nabywca, nie naruszając w niczym umowy, wyciął 39 drzew, a pozostawił tylko 10, a jak to zrobił, wskazuje rysunek II.



Rys. I



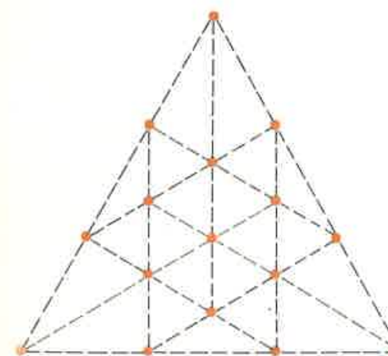
Rys. II

Właściciel spostrzegł się zbyt późno i żadne złorzeczenia ani narzekania, ani skargi sądowe nie pomogły; nabywca bowiem trzymał się dosłownie brzmienia umowy, tylko ją na swój sposób interpretował.

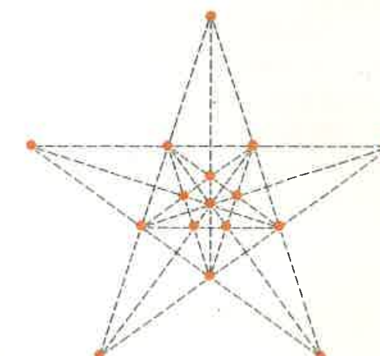
75. Drzewa w parkach

W pewnym parku 16 pięknych dębów tworzyło 12 rzędów, po 4 drzewa w rzędzie, jak widzimy na rysunku I.

Tę samą ilość 16 sztuk można rozsadzić tak, żeby tworzyły 15 rzędów, po 4 drzewa w każdym rzędzie (rys. II).



Rys. I



Rys. II



76. Jak bez żadnego przyrządu można określić odległość przedmiotu o znanych nam rozmiarach

Przypuśćmy, iż oddaliliśmy się od namiotu, obozu lub domu, którego szerokość i długość jest nam znana, i chcemy sprawdzić, jak daleko odeszliśmy. Albo też powracamy z wycieczki i zobaczywszy z daleka dom czy namiot pragniemy wiedzieć, ile jeszcze drogi mamy przed sobą. Nie mając przy sobie żadnego przyrządu posiłkujemy się wyłącznie ręką i okiem. Wyciągamy przed siebie prawą rękę i przymykając lewe oko ustalamy koniec wskazującego palca na lewym boku domu; następnie, starając się utrzymać rękę w pełnym bezruchu szybko zamykamy prawe oko, a otwieramy lewe; wówczas koniec palca przesunie się pozornie ku prawej stronie i stanie np. na połowie frontonu domu. To spostrzeżenie już nam wystarczy, by w pewnym — oczywiście, bardzo dalekim — przybliżeniu określić poszukiwaną odległość.

Długość naszej ręki z ramieniem od palców aż do oka jest nam przypuszczalnie znana dość ściśle; wynosi — dajmy na to — 80 cm. Odległość między źrenicami naszymi jest, a przynajmniej może być nam też znana; przypuśćmy, że równa się 7 cm. Jeżeli ponadto wiemy, iż szerokość domu wynosi 20 m, to połowa tej wielkości, czyli 10 m, jest ostatnim z trzech wyrazów proporcji, w której przez x oznaczamy poszukiwaną odległość:

$$0{,}07 : 10 = 0{,}8 : x$$

Z proporcji tej znajdujemy $x = \frac{0{,}8 \cdot 10}{0{,}07} =$ około 115 m.

Z czego zaś ta proporcja powstała, łatwo chyba każdy się domyśli.

77. Matematycznie zaślubieni

Na targi poznańskie zjechali trzej dalecy krewni pewnego sędziwego matematyka: Antoni, Jan i Karol z żonami: Anną, Janiną i Natalią. Staruszek po wizycie, którą mu młode pary razem złożyły, nie mógł sobie przypomnieć, kto właściwie z kim był zaślubiony. Przypomniał sobie natomiast, że gdy mowa była o czynionych w mieście zakupach, okazało się, że każda z sześciu osób za każdy nabyty przedmiot zapłaciła tyle złotych, ile przedmiotów nabyła. Mężowie — o dziwo — wydali więcej niż ich małżonki i — co jeszcze dziwniejsze — każdy z nich wydał o 63 zł więcej od swej żony. Przy czym Antoni kupił o 23 przedmioty więcej niż Janina, a Jan o 11 przedmiotów więcej niż Anna. Na tych, tak skąpych danych oparł się staruszek przywołując na pomoc swą rozległą niegdyś wiedzę matematyczną i ... obliczył dokładnie, która z trzech pań którego z trzech jego krewnych była żoną. Jak tego mógł dokonać?

Oznaczył mianowicie ilość przedmiotów nabytych przez jednego z panów literą x; pan ten wydał więc x^2 złotych. Jeżeli żona jego kupiła y przedmiotów, to zapłaciła za nie y^2 złotych. Różnicę $x^2 - y^2 = 63$ można przedstawić w takiej postaci:

$$63 = (x + y) \cdot (x - y)$$

Aby znaleźć $(x + y)$ i $(x - y)$, trzeba rozłożyć liczbę 63 na dwa czynniki całkowite. Można dokonać tego w trojaki sposób:

$$63 = 63 \cdot 1 = 21 \cdot 3 = 7 \cdot 9$$

Powstaną stąd następujące możliwości:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 63 \\ x_1 - y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + y_2 = 21 \\ x_2 - y_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 + y_3 = 9 \\ x_3 - y_3 = 7 \end{cases}$$

Rozwiązując je otrzymał matematyk wszystkie możliwe wartości dla x i y, mianowicie $x_1 = 32$, $y_1 = 31$; $x_2 = 12$, $y_2 = 9$; $x_3 = 8$, $y_3 = 1$. Pozostało teraz odszukać tylko takie pary wartości dla owych niewiadomych, przy których $x - y = 23$ i $x - y = 11$. Okazało się wtedy z równości $x_1 - y_2 = 23$, że x_1 — to ilość przedmiotów nabyta przez Antoniego, y_2 — przez Janinę, a z równości $x_2 - y_3 = 11$ wynika, że x_2 odpowiada ilości przedmiotów nabytych przez Jana, y_3 — przez Annę.

Ze zrozumiałym więc triumfem zanotował staruszek ostateczny wynik swych obliczeń:

Antoni	Jan	Karol
Natalia	Janina	Anna

I dopisał: *Matematycznie zaślubieni.*



78. Ogarki zamiast zegarków

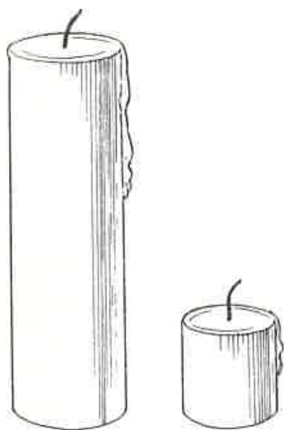
Zgasło nagle światło elektryczne, trzeba więc było zapalić świece; dwie jakieś znalazły się w domu „nie od pary", lecz je czym prędzej zapalono. Na drugi dzień powstała sprzeczka na temat: jak długo trwała przerwa w oświetleniu elektrycznym. Nikt ściśle czasu tego nie ustalał, nikt również nie mierzył świec przed ich zapaleniem. Pozostałe ogarki zostały wyrzucone do śmieci. Już miano zrezygnować z rozstrzygnięcia sporu, gdy ktoś przypomniał sobie, że świece były równej długości, lecz jedna była grubsza — taka, jaka płonąć może 5 godzin, druga cieńsza — czterogodzinna.



— Nic nam z tej wiadomości nie przyjdzie, skoro nie wiemy, jaka część tych świec pozostała.

— Owszem, spróbujmy; może zauważyłeś, ile centymetrów mniej więcej wynosiła długość jednego choćby ogarka.

Tego nie potrafię powiedzieć, ale wiem natomiast z całą pewnością, że jeden ogarek był cztery razy dłuższy od drugiego.



— To wystarczy — zawołał najtęższy w matematyce uczestnik tego zdarzenia. I rzeczywiście zdołał na podstawie tej przesłanki wyliczyć, jak długo paliły się świece. A uczynił to w taki sposób:

Długość spalonej części świecy cieńszej, czterogodzinnej, powinna była wynosić $\frac{5}{4}$ długości spalonej części świecy grubszej, pięciogodzinnej, gdyż pierwotnie obie świece, choć różnej grubości, były na wysokość równe. Różnica więc długości ogarków równać się musi $\frac{1}{4}$ spalonej części świecy grubszej. Równocześnie jednak różnica ta równa się $\frac{3}{4}$ większego i grubszego ogarka. Inaczej mówiąc: $\frac{3}{4}$ grubego ogarka równa się $\frac{1}{4}$ długości spalonej części tejże świecy. Cały więc ogarek $\frac{4}{4}$ stanowi $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ spalonej części grubej świecy, czyli $\frac{1}{4}$ pełnej jej wysokości.

Spaliło się więc $\frac{3}{4}$ świecy grubej, która w całości spala się w przeciągu 5 godzin. Świeca zatem płonęła $\frac{5\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$ godziny.

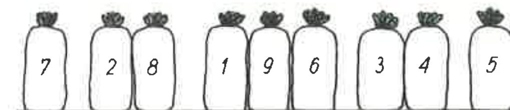




79. Figle młynarczyka

Przywieziono do młyna 9 worków ze zbożem, ponumerowanych kolejnymi cyframi od 1 do 9, i ustawiono je pod ścianą. Gdy młynarz począł się im przyglądać, zauważył, iż przypadkowe zupełnie rozstawienie dało ciekawe wyniki. Na dwóch krańcach stały worki samotne, dalej dwie pary, a pośrodku trzy worki tuliły się ku sobie.

Co jednak było jeszcze ciekawsze, to fakt, że przemnożenie liczby wypisanej na lewym worku-samotniku przez liczbę, na którą składały się dwie cyfry sąsiedniej pary worków, dawało w iloczynie liczbę wypisaną na środkowej grupie trzech worków, mianowicie $7\cdot 28=196$. Młynarz zdziwił się wielce temu przypadkowi, uznał go za dobrą dla siebie wróżbę i postanowił szukać losu na loterię z numerem 728196.



Młynarczyk proponował mu spółkę, lecz młynarz nie zgodził się, bo po cóż miałby się dzielić tak pewną wygraną! Wesoły chłopak postanowił wtedy spłatać majstrowi figla i w nocy poprzestawiał worki tak, że tym razem po obu stronach iloczyny samotników i par równały się liczbie środkowej. Była to więc kombinacja jeszcze bardziej dziwna. Młynarz stanął rankiem przed workami wielce zaniepokojony. Widzi:

4 39 156 78 2

Mnoży: $4\cdot 39=156$ i $2\cdot 78=156$. Jaką by z tego wyciągnąć dla siebie wróżbę? Zwątpił już o skuteczności tamtej pierwszej, niekompletnej przepowiedni, ujrzawszy coś jeszcze bardziej niezwykłego ... Na trzeci dzień widzi znowu inny układ i znów podobny skutek mnożenia.

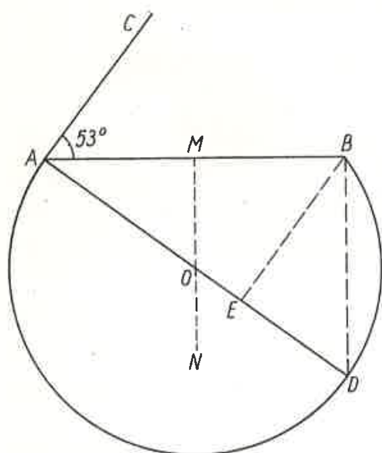
Czy mogą być inne jeszcze takie układy? Spróbujcie na to odpowiedzieć sami.



80. Kształt widowni

Jaki kształt należy nadać sali teatralnej, aby widzowie siedzący wzdłuż jej ścian widzieli scenę ze wszystkich miejsc pod tym samym kątem?

Niechaj odcinek AB oznacza przód sceny.



Z punktu A kreślimy prostą AC tak, żeby kąt BAC był równy 53°, czyli kątowi uznanemu za najodpowiedniejszy dla dogodnego spoglądania na scenę. Przez punkt A kreślimy prostą AD prostopadłą do prostej AC i przez środek M odcinka AB kreślimy prostą MN prostopadłą do prostej AB. Punkt O, czyli punkt przecięcia prostych AD i MN, będzie środkiem okręgu przechodzącego przez punkty A i B i stycznego do prostej AC. Łuk ADB określi poszukiwany przez nas kształt, jaki należy nadać sali, gdyż istotnie wszystkie kąty, których wierzchołki leżą na tym łuku i których ramiona przechodzą przez punkty A i B, będą oczywiście równe kątowi ADB, a więc i kątowi BAC, co wynika jasno z rozpatrywania trójkąta ABD, mianowicie: jeśli prosta BE jest prostopadła do prostej AD, to $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle BAC$.

81. Lot okólny pszczoły

Mądra, pracowita pszczoła przedsięwzięła daleką wycieczkę, bo dowiedziała się, że kędyś na południu kwitnie koniczyna. Leciała wytrwale przez całą godzinę aż wreszcie istotnie dotarła do kwitnącego łanu. Przelatując z kwiatka na kwiatek zabawiła tam pół godzinki, gdyż przypomniała sobie, iż warto by jeszcze skręcić na zachód i wstąpić do sadu, gdzie właśnie ulubione jej białe porzeczki były w pełnym kwieciu. Przelot zajął $\frac{3}{4}$ godziny, a zajrzenie do wszystkich krzaków, choć pobieżne, pochłonęło jednak półtorej godziny. Z sadu pszczoła już najbliższą drogą wróciła do ula. Ile czasu trwał ten lot okólny pszczoły razem z postojami?

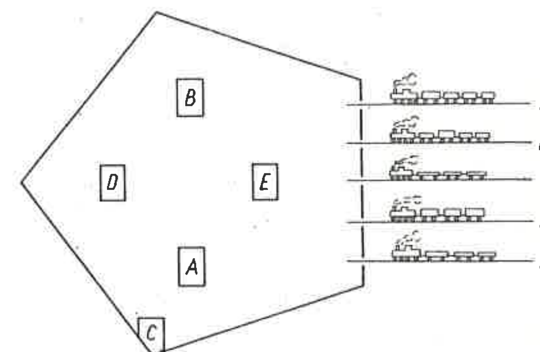
Zadanie wcale nie łatwe. Należy na pomoc przywołać Pitagorasa z jego sławnym trójkątem o bokach 3, 4 i 5. Narysujmy schemat lotu pszczoły. Przybierze on kształt trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych równych 60 i 45 minutom, czyli 4 i 3 kwadransom. Przeciwprostokątna wyobrażająca najkrótszą drogę powrotną pszczoły z sadu do ula da nam czas zużyty na ów powrót — w liczbie 5 kwadransów.

Cała wycieczka trwała 5 godzin.



82. Koncesje chińskie

Było to w dawnych latach, kiedy państwa imperialistyczne narzucały Chinom swoją wolę, wymuszając od rządów chińskich różne koncesje, a i mandaryni chińscy chętnie przy tej sposobności pilnowali swego interesu.

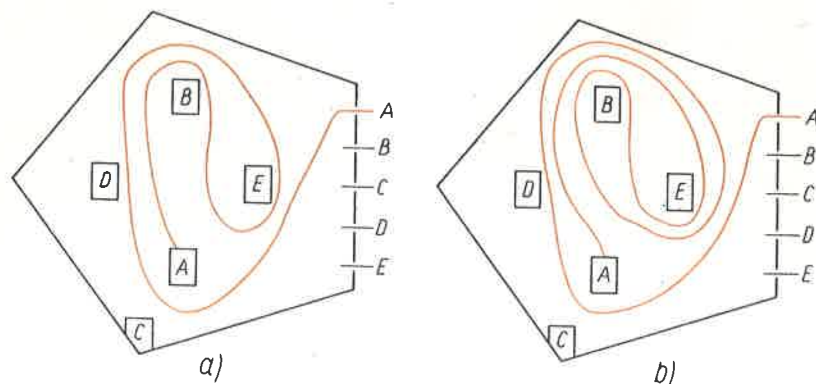


Rys. I

Do pewnego miasta chińskiego otoczonego murem, oczywiście też „chińskim", pięć kompanii kolejowych zamierzało doprowadzić swe linie i zbudować dworce. Wszystkie koncesje wydano pod warunkiem ścisłego zastosowania się do decyzji miejscowego mandaryna w sprawie bram, przez które koleje przetną mur, oraz miejsc wyznaczonych na budowę dworców. Na rysunku I

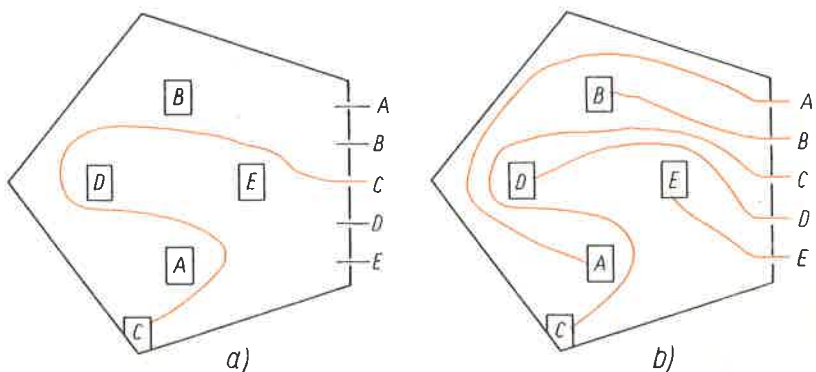
odpowiednie litery oznaczają linie i dworce każdej z tych pięciu kompanii. Problem rozstrzygnięty był zaiste po chińsku, trudno bowiem było bardziej skomplikować całą sprawę, zwłaszcza że mandaryn zastrzegł kategorycznie, iż żadna linia kolejowa nie może ani przechodzić przez dworzec obcy, ani nawet krzyżować się z inną koleją.

Zaproponujcie komuś rozwiązanie tego problemu, a przekonacie się, że zgoła niełatwe mieli inżynierowie zadanie.



Rys. II

Każdy zagadnięty zacznie od linii A kreślić przeróżne esy-floresy, jak na przykład na rysunkach II a) i b). Tymczasem aby osiągnąć wynik względnie najprostszy, trzeba zacząć od linii C i prowadzić ją do dworca C tak, żeby dworce B i A zostały po prawej stronie tej linii, a dworce D i E po lewej — jak na rysunkach III a) i b).



Rys. III

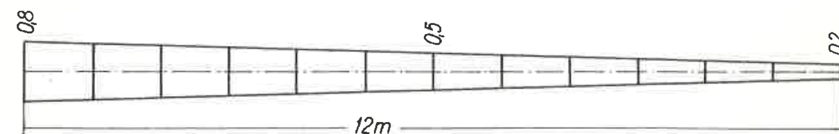
83. Dziwny pień drzewa

W praktyce leśnej objętość pnia powalonego drzewa oblicza się w ten sposób, jak gdyby to był walec obrotowy, przy czym średnicę tego walca mierzy się w połowie długości pnia. Jeżeli więc długość pnia drzewnego oznaczymy przez h, a średnicę w połowie długości oznaczymy przez d, to objętość takiego pnia oblicza się według wzoru:

$$V = \frac{\pi}{4}\, d^2h, \text{ czyli } V = 0{,}785\; d^2h.$$

Zazwyczaj bierze się przybliżenie: $V = 0{,}8\; d^2h$.

Oto leżał pień drzewa 12-metrowej długości. Na grubszym końcu pień miał 0,8 m średnicy, a na cieńszym końcu 0,2 m średnicy.



Klient prosił o obliczenie objętości.

Średnica pnia w połowie jego długości wynosiła 0,5 m. Stąd objętość pnia: $V = 0{,}8 \cdot 0{,}5^2 \cdot 12 = 2{,}4$ m^3.

Obliczono należność licząc po 100 zł metr sześcienny; wypadło 240 zł. Ale w tym momencie klient się rozmyślił. Powiedział, że potrzebny mu jest właściwie pień 10-metrowej długości. Odcięto więc od cienkiego końca 2 m pnia. Reszta pnia miała długość $h = 10$ m, a średnica w połowie długości wynosiła $d = 0{,}55$ m. Obliczono nową objętość, która musiała być mniejsza. Z obliczenia wypadło: $V = 0{,}8 \cdot 0{,}55^2 \cdot 10 = 2{,}42$ m^3.

Przy tej samej cenie 100 zł za metr sześcienny pień skrócony o 2 m kosztował 242 zł, czyli o 2 zł więcej niż pień pierwotny.

A przecież został jeszcze odcinek pnia długości 2 m, o przeciętnej średnicy 0,25 m. Objętość tego odcinka wynosi: $V = 0{,}8 \cdot 0{,}25^2 \cdot 2 = 0{,}1$ m^3, a więc sam tylko odcinek kosztował 10 zł. Skąd te dziwy?

Otóż winien jest wzór stosowany do obliczenia objętości pnia drzewnego. Jest to wzór niedokładny. Aby obliczyć dokładniej objętość pnia drzewnego, należy stosować wzór

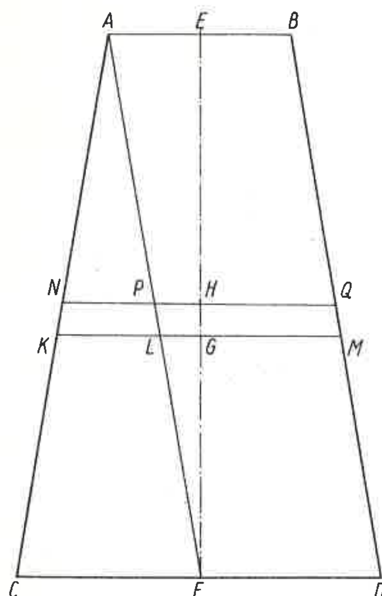
$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2}{3} \cdot h,$$

gdzie d_1 i d_2 oznaczają średnice pnia na obu jego końcach, a h oznacza długość pnia. Według tego wzoru cały pień kosztował 263,76 zł, pień skrócony 253,82 zł, a odcinek pnia 9,94 zł.

84. Przemyślna sroka

Wśród skwarnego lata pewna mądra a bardzo spragniona wody sroka znalazła w ogrodzie wkopaną do ziemi blaszaną konewkę dziecinną, w której było trochę czystej wody. Lecz woda stała w konewce zbyt nisko i sroka — mimo różnych zabiegów ekwilibrystycznych — nie mogła jej dosięgnąć.

„Gdyby tak podnieść poziom wody o ćwierć cala" — pomyślała sobie sroka (nie znała ona miar metrycznych) — „napiłabym się czystej, zimnej wody".



Chodziła sroka dokoła konewki i mierzyła. Górny otwór konewki miał półtora cala średnicy, a dno — trzy cale. Konewka miała cztery i pół cala głębokości, ale wody w niej było tylko na dwa cale.

Przypomniała sobie sroka, że ma w dziupli starego drzewa ukryty skarb z błyszczących monet. Każda moneta ma 1 linię grubości (a linia — to dwunasta część zacnego cala) i 16 linii średnicy. Przejdzie więc taka moneta przez otwór konewki i wpadnie do wody.

Zaczęła sroka latać do dziupli, przynosić monety i wrzucać je do wody, próbując za każdym razem, czy już może dosięgnąć wody. A my tymczasem obliczmy, ile lotów musi sroka wykonać, nim zdoła ugasić pragnienie.

Wykonajmy szkic konewki:

Odłóżmy odcinek FD równy odcinkowi AB; wówczas prosta AF będzie równoległa do prostej BD. Woda była na poziomie KM, a sroka chciała podnieść ją do poziomu NQ.

Obliczamy odcinki w liniach:

$$CF = 18, \quad EF = 54, \quad EG = 30, \quad EH = 27.$$

Mamy proporcje:

$$\frac{KL}{CF} = \frac{EG}{EF}, \quad \text{skąd } KL = 10,$$

$$\frac{NP}{CF} = \frac{EH}{EF}, \quad \text{skąd } NP = 9.$$

Zbieramy dane potrzebne do obliczenia objętości warstwy między poziomem KM a poziomem NQ:

$$d_1 = KM = 28, \quad d_2 = NQ = 27, \quad h = GH = 3$$

i stosujemy wzór

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{3} \cdot h$$

Objętość warstwy $KNQM$ wynosi około 1781 linii sześciennych, a jedna moneta ma objętości około 202 linii sześciennych; z tego wniosek, że dopiero dziewiąta moneta pozwoli sroce sięgnąć dziobem wody, ale by ugasić pragnienie, będzie musiała sroka utopić jeszcze dziesiątą monetę.

85. Paginacja wielkiego dzieła

Przy numerowaniu stronic rękopisu, czyli tak zwanym paginowaniu, napisano ogółem 4989 cyfr. Czy i jak można określić, ile stronic liczył ten manuskrypt?

Do napisania 999 liczb początkowych potrzeba $9 \cdot 321 = 2889$ cyfr. Za stronicą 999 rozpoczną się już stronice paginowane liczbami czterocyfrowymi; z podanej liczby 4989 cyfr na owe stronice pozostanie $4989 - 2889 = 2100$ cyfr. Wystarczy więc podzielić 2100 przez 4, aby się dowiedzieć, że poza stronicą 999 rękopis liczy $2100 : 4 = 525$ stronic. Ogółem więc rękopis składa się z 1524 stronic.

Niemały to był rękopis!

86. Wagon z ładunkiem lżejszy od próżnego

Na niektórych kolejach bywają specjalne wagony towarowe w kształcie wielkich cylindrów, przeznaczone do przewożenia gazu. Ciężar własny takich wagonów wynosi zwykle około 10 ton, pojemność — 50 metrów sześciennych. Przypuśćmy, iż napełniono wagon wodorem, którego metr kubiczny waży okrągło 100 gramów. Ile ważyć będzie wagon razem z ładunkiem?

Otóż wagon pełen takiego towaru nie tylko nie będzie ważył więcej niż wagon próżny, lecz przeciwnie — będzie lżejszy.

Aby móc go napełnić wodorem, należało wpierw usunąć powietrze, którego 50 metrów sześciennych waży okrągło 65 kg, gdy tymczasem 50 m^3 wodoru waży około 4,5 kg. Wagon stanie się więc lżejszy o $65 - 4{,}5 = 60{,}5$ kg.



87. Najtańsza furmanka

W dawnych czasach opowiadano sobie następującą anegdotę.

Pewien obywatel małego miasteczka znany był ze skąpstwa. Gdy miał sprawę w powiatowym mieście odległym o 25 kilometrów, polował na sąsiadów, by prosić o podwiezienie.

Na polowaniu jednak, jak wiadomo, różnie bywa. Czasem zwierzyna nie dopisze. Kiedyś kręcił się po rynku miasta szukając, kto by go mógł odwieźć za darmo do domu.

Nikogo nie było. Musiał więc w braku uczynnego sąsiada wziąć płatną furmankę. Obszedł wszystkich dorożkarzy urządzając przetarg ofertowy; ten chciał 250, ten 200, ów 150 złotych. Wszystkie te ceny wydały się skąpemu jegomościowi nie do przyjęcia. Dotarł wreszcie do stojącego kędyś na uboczu chłopa z nędznym wózkiem i nędzną szkapiną. Zapytany, ile chce za odwiezienie, chwilę popatrzył w ziemię, poskrobał się po głowie i wreszcie odparł:

— At, za pierwszy kilometr grosz mi pan da, nie będzie chyba za wiele. Za drugi to już dwa, bo droga ciężka; na trzecim idzie pod górę, to mi pan da 4 grosze, a tam i koń będzie zmęczony, i góra jeszcze większa, to dostanę znów dwa razy tyle groszy i dalej tak już do końca.

— Ot, głupi chłop — pomyślał mieszczuch ledwie powstrzymując się od śmiechu — na grosze liczy. Cóż, nie mam obowiązku pouczać go, że nie umie rachować.

Z pośpiechem dosiadł wózka.

— Zgoda! — zawołał — Jedziemy!

Pojechali, ale gdy dojechali, okazało się, iż skąpy mieszczuch musiał za tę jazdę oddać „głupiemu" chłopkowi całe swoje gospodarstwo, wszystko, co miał, i jeszcze sam został u niego parobkiem „na odrobek". gdyż owa „najtańsza furmanka" kosztowała ni mniej, ni więcej tylko 335 544 zł 31 gr.

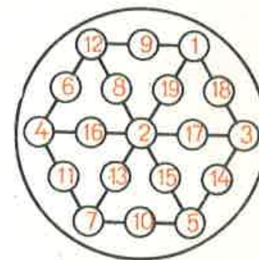
Jeśli nie wierzycie, przeliczcie pamiętając, że w postępie geometrycznym 1, 2, 4, 8, ... suma pierwszych 24 wyrazów równa się wyrazowi dwudziestemu piątemu zmniejszonemu o jedność.





88. Trafił w sedno

W Anglii w dawnych wiekach słynne były związki łuczników, które chlubiły się nie tylko celnością swych mistrzów, lecz także oryginalnością, bądź starożytnym pochodzeniem tarcz, jakie służyły za cel przy popisach i konkursach.

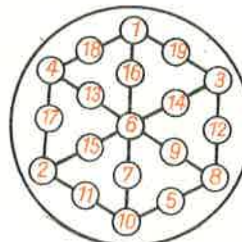


Przy przyjmowaniu młodego adepta do związku przełożony miewał doń zazwyczaj długą przemowę o wielkiej godności tarczy związkowej. Tarcze były przeróżne. Istniał np. związek, który szczycił się tarczą liczbową z sum trzech liczb we wszystkich kierunkach zawsze tą samą.

Pewien młody łucznik fatalnie pudłował: strzały szły w ziemię lub co najwyżej w podpory tarczy.

— Z ciebie nic tu nie będzie — rzekł mu przełożony i jął się rozwodzić nad tym, że do tak dostojnej tarczy, jakiej drugiej na świecie nie ma i być nie może, niegodzien jest strzelać „byle kto".

— Idź, ucz się pilnie strzelać do płotów. Po roku przyjdziesz, spróbujemy.



Młodzieniec wysłuchał przemowy tej pokornie, odszedł, lecz już przy najbliższym strzelaniu związkowym powrócił bez łuku wprawdzie, ale z drugą tarczą, wcale nie gorszą od tej, do której mu strzelać zabroniono, choć z innym rozstawieniem liczb.

Przekonał więc przełożonego, że i on spudłował twierdząc, iż drugiej takiej tarczy na świecie być nie może.

A czy mogą być jeszcze inne tak „dostojne tarcze"? Poszukajcie!



89. Fenomenalny rachmistrz-kawalerzysta

Słynny był podobno niegdyś we Francji pewien znakomity kawalerzysta, który bez względu na liczbę uczestników wesołych kawalkad potrafił momentalnie odpowiedzieć, ilu różnymi sposobami mogli się jeźdźcy ugrupować w równe szeregi, jadąc po dwóch, po trzech, po czterech, przy czym w żadnym szeregu jeźdźca nie brakło i nikt nie zbywał.

Zjeżdżało się w tych czasach nieraz po kilkadziesiąt i paręset osób rycerzy i dam, a nie zdarzyło się, by ów rachmistrz w swym orzeczeniu kiedykolwiek się pomylił.

Wezwał go kiedyś król w czasie defilady licznych zastępów wojskowych i rzekł:

— W tym oddziale jest 1260 ludzi. Ilu sposobami można ich ustawić w równych szeregach?

— Na 34 sposoby, miłościwy panie.

— A w tamtym 7560? . . .

Zadanie było trudniejsze nieco, więc kawaler dłuższą chwilę pomyślał, ale wnet już miał odpowiedź gotową: na 62 sposoby!

—Jakże to robicie, panie kawalerze?

—Och, nic łatwiejszego: każdy z wykładników potęg podzielników będących liczbami pierwszymi powiększam o jedność, mnożę i odejmuję dwójkę, bo wszak nie sposób jechać gęsiego lub wszyscy w jednym szeregu.

Usłyszawszy takie objaśnienie król podobno zbladł i zaniechał dalszej indagacji, gdyż poczuł, że go zamroczyło, a nie chciał dać tego po sobie poznać. Pożegnał tedy grzecznie kawalera i odjechał ze swą świtą czym prędzej, nie zważając, czy jadą „gęsiego", czy wszyscy w jednym szeregu...

Szybkie odnajdywanie liczby podzielników, które w owych czasach mogło się wydawać czymś fenomenalnym, jest dziś dostępne — przy pewnej wprawie — wielu wcale nie fenomenalnym rachmistrzom.

Zasada polega na tym, że jeśli $N = a^p \cdot b^q \cdot c^r \ldots$, przy czym a, b, c, ... są to liczby pierwsze, to liczba wszystkich podzielników (tzn. włączając w to jedność i samą też liczbę N) równa się

$$(p + 1) \cdot (q + 1) \cdot (r + 1) \ldots$$

Więc na przykład

$$7560 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

Wykładniki potęg: 3, 3, 1, 1.

Liczba podzielników:

$$(3 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 64$$

Ów fenomenalny kawalerzysta wyłączał atoli jazdę „gęsiego" i w jednym szeregu, dlatego odpowiedź jego brzmiała 62.

90. Zawiła kronika rodzinna

W rodzinie jest pięcioro dzieci. Jaś jest dwa razy starszy od Tereni. Nela i Terenia razem mają dwa razy tyle lat, co Jaś. Sławek i Jaś razem mają dwa razy tyle lat, co Nela i Terenia razem. Hania, Nela i Terenia razem mają dwa razy tyle lat, co Sławek i Jaś. Hania właśnie ukończyła lat 21. Ile lat ma każde z pozostałego rodzeństwa?

Obliczenie daje się łatwo przeprowadzić, jeżeli za miarę wieku przyjmiemy wiek Tereni. Oznaczmy go literą t. Wiek Jasia wynosi $2t$. Nela i Terenia razem mają $4t$ lat, a więc wiek Neli wynosi $3t$. Sławek i Jaś razem mają $8t$ lat, a więc wiek Sławka wynosi $6t$. Hania, Nela i Terenia razem mają $16t$ lat, a więc wiek Hani wynosi $12t$. Wiemy, że $12t = 21$, a więc $t = 1\frac{3}{4}$. Dalsze obliczenia pójdą gładko. (Odpowiedź na str. 306.)

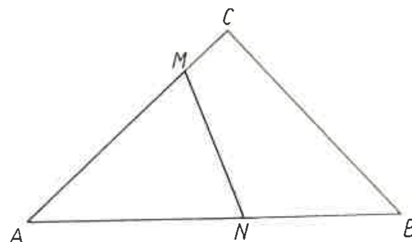
Zauważmy, że lata trojga najmłodszych dzieci aż do Neli stanowią postęp arytmetyczny (z różnicą roku i dziewięciu miesięcy) — i postęp ten zachowa się w dalszych latach, natomiast lata trojga starszych, od Neli począwszy, stanowią postęp geometryczny, który się rychło rozchwieje.

91. Mądry podział parceli

Dwaj bracia otrzymali w spadku po ojcu duży oparkaniony dookoła plac w kształcie trójkąta. Postanowili podzielić go na równe części po linii prostej tak, żeby na wspólnej granicy można było postawić jak najkrótszy parkan.

Niełatwą miał pracę mierniczy, do którego z takim zwrócili się żądaniem. Począł jednak przypominać sobie różne prawidła geometryczne i wreszcie odszukał miejsce, w którym należało pociągnąć granicę. Pójdźmy za jego rozumowaniem:

Ze wszystkich trójkątów o danej podstawie i danym kącie przy wierzchołku największe pole będzie miał trójkąt równoramienny, ponieważ geometrycznym miejscem wierzchołków takich trójkątów będzie łuk mieszczący dany kąt, a najwyższy punkt łuku leży w jego środku. Odwrotnie więc powiedzieć można, że ze wszystkich trójkątów mających dane pole i dany kąt u wierzchołka najmniejszą podstawę ma trójkąt równoramienny. Ze wszystkich zaś trójkątów równoramiennych mających dane pole ten będzie miał najmniejszą podstawę, którego kąt u wierzchołka będzie najmniejszy.



Z geometrii elementarnej wiadomo ponadto, że pola dwóch trójkątów mających jeden kąt wspólny mają się tak do siebie, jak iloczyny boków tworzących ów kąt wspólny.

Na zasadzie powyższych przesłanek należało w trójkątnej parceli ABC (obacz rysunek) od wierzchołka A, którego kąt jest najmniejszy, odłożyć wzdłuż obu boków odcinki $AM = AN$ równe średniej proporcjonalnej między jednym z boków AB lub AC i połową drugiego boku. Linia MN będzie linią poszukiwanej granicy, gdyż

$$\triangle AMN : \triangle ABC = (AM \cdot AN) : (AC \cdot AB),$$

to znaczy

$$\triangle AMN : \triangle ABC = \tfrac{1}{2},$$

a więc trójkąt AMN stanowi połowę trójkąta ABC.





92. Zaradny rolnik

W gospodarstwie niezbyt zasobnym w ... odważniki chciał rolnik zważyć pięć worków ze zbożem. Waga dziesiętna była jaka taka, lecz brakowało niektórych odważników, tak że nie można było zważyć ciężaru większego ponad pół kwintala, a mniejszego od kwintala. Worki zaś miały właśnie coś niecoś powyżej 50 kg.

Jak postąpilibyście w takiej sytuacji?

Mogą być różne sposoby: podział zawartości worków do worka jeszcze próżnego, odsypywanie itp. Sądzimy jednak, iż sposób, jaki zastosował ów rolnik, jest najbardziej matematyczny. Ponumerował worki i zważył je biorąc po dwa we wszelkich możliwych zestawieniach par. Kombinacyj takich może być 10; dziesięć więc otrzymał ciężarów, które zapisał w porządku wzrastającym: 110 kg, 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg, 116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 i 121 kg. Z notatką tą poszedł do domu i tam obliczył spokojnie, a bez trudności wagę każdego worka.

Ciekawi jesteście, jak to uczynił? Próbujcie sami rozwiązać to zadanie, a dopiero później zapoznajcie się z podanym niżej rozwiązaniem.

Przede wszystkim zsumować trzeba ciężary wszystkich par: wyniosą one 1156 kg. W wadze tej każdy worek wzięty był cztery razy; waga więc pojedyncza wszystkich pięciu worków razem wyniosła $\frac{1156}{4} = 289$ kg.

Oznaczmy literą A najlżejszy worek, literą B — cięższy, a dalsze — literami C, D i E w miarę wzrastającej wagi.

Otóż wagę 110 kg mogła wykazać tylko para worków $(A + B)$, następną wagę 112 kg dały worki $(A + C)$. Najwyższą wagę 121 kg musiały mieć dwa worki najcięższe, tj. $(D + E)$, drugą zaś od końca wagę 120 kg — worki $(C + E)$.

Sumując wagi najmniejszą i największą: $(A + B) + (D + E)$ otrzymujemy $110 + 121 = 231$ kg. Jeśli odejmiemy liczbę tę od ogólnej wagi wszystkich pięciu worków (289 kg), to otrzymamy oczywiście wagę worka $C = 289 - 231 = 58$ kg. Teraz już tak łatwo dojść wagi wszystkich pozostałych worków, że nie warto o tym mówić.

93. Godło wystawy

Zaprojektowana była wystawa. Dyrekcja rozpisała konkurs na godło wystawy.

Wśród nadesłanych projektów znalazły się dwa dość podobne pomysły.

Jeden z tych projektów proponował, by godłem wystawy była piramida ze spiętrzonych sześcianów: na wielkim sześcianie o krawędzi $a = 25$ m ma być umieszczony sześcian o krawędzi 20% mniejszej, na nim zaś nowy sześcian o krawędzi o 20% mniejszej od krawędzi poprzedniego sześcianu i tak dalej.

Drugi projekt kładł w podstawie piramidy sześcian o krawędzi $a = 25$ m, na nim miał być sześcian o krawędzi $\frac{1}{2}a$, potem z kolei sześciany o krawędziach $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$ i tak dalej.

Która z tych piramid utworzonych z sześcianów będzie wyższa?

Okazuje się, że pierwsza wieża będzie miała 125 metrów wysokości. Żeby się o tym przekonać, trzeba obliczyć sumę szeregu geometrycznego

$$25 + 25 \cdot \tfrac{4}{5} + 25 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + 25 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^3 + \ldots$$

Jak wiadomo, suma taka wyraża się wzorem

$$S = \frac{a}{1-q},$$

gdzie a oznacza pierwszy wyraz szeregu, a q — jego iloraz. W danym przypadku mamy $a = 25$, $q = \frac{4}{5}$, a więc $S = 125$.

Dla obliczenia wysokości drugiej wieży trzeba znaleźć sumę takiego szeregu:

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4} + \frac{a}{5} + \ldots$$

Szereg taki nazywa się *szeregiem harmonicznym*. Otóż jest to szereg rozbieżny, gdyż suma jego wyrazów wziętych w dostatecznej ilości może przekroczyć dowolnie wielką, z góry zadaną liczbę.

Łatwo to stwierdzić na podstawie nieco oryginalnego rozumowania. Wyrazy szeregu tego można połączyć w takie grupy:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \ldots$$

Jeśli mianowniki wszystkich ułamków zawartych w którymkolwiek nawiasie zrównamy z mianownikiem największym, to otrzymamy szereg

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \ldots,$$

co można napisać w postaci

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots$$

Zestawiając szeregi:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \ldots$$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \ldots$$

widzimy, że każdy nawias w pierwszym szeregu zawiera wyraz większy od odpowiedniego nawiasu w drugim szeregu. Ale drugi szereg jest rozbieżny, a więc i pierwszy szereg jest rozbieżny.

Widzimy więc, że wieżę według tego zaiste imponującego projektu trzeba by ciągnąć w górę w nieskończoność, ale po drodze doszlibyśmy do takiej wysokości, przy której siła odśrodkowa wskutek obrotu Ziemi dookoła osi byłaby większa niż siła przyciągania Ziemi . . .

94. Rozmowa o wieku syna i ojca

Przed mniej więcej 30 laty znaleźliśmy w czasopiśmie *Parametr* taką rozmowę syna z ojcem. — Syn: „Tatusiu, dziś jest pierwszy dzień nowego roku, a zarazem dzień moich i twoich urodzin. Czy wiesz, Tatusiu: suma cyfr nowego roku wynosi tyle, ile lat dziś ukończyłem, a w zeszłym roku tak nie było. Czy zdarzył ci się kiedykolwiek taki zbieg okoliczności?" — Ojciec (po namyśle): „Nie, mnie się taka koincydencja nie przytrafiła". — Syn: „A w którym roku ty się urodziłeś?" — Ojciec: „Skoro lubisz zagadki, tyle ci tylko powiem, że suma cyfr roku mego urodzenia dzieli się przez 9".

W którym roku urodził się ojciec i w którym urodził się syn? Kiedy była ta rozmowa?

Oto rozwiązanie:

Oznaczmy liczbą n ów rok, w którym po raz pierwszy zaszła taka koincydencja, iż wiek syna równał się sumie cyfr liczby n. Jeżeli od liczby n odejmiemy wiek syna, to otrzymamy rok jego urodzenia. Ale różnica między jakąkolwiek liczbą i sumą jej cyfr jest zawsze podzielna przez 9. Stąd wniosek, że rok urodzenia syna dzieli się przez 9. Nie był to rok 1935 ani 1926, gdyż dla tych lat koincydencja nastąpiła dopiero w roku 1950, względnie 1940. Był to więc rok 1917, a koincydencja zaszła w roku 1930 (a więc istotnie „przed ok. 30 laty"). Koincydencja ta powtarzała się przez całe dziesięciolecie aż do roku 1939.

Nie każdy rok urodzenia podzielony przez 9 przesądza, że zajdzie koincydencja wieku z sumą cyfr roku kalendarzowego; ojciec wprawdzie urodził się w roku podzielnym przez 9, ale jemu się taka koincydencja nie przytrafiła. W wieku XIX był jeden tylko taki rok, mianowicie 1881. Jeżeli człowiek urodził się w roku 1881, to do roku 1899 wiek jego był stale mniejszy od sumy cyfr roku kalendarzowego, a od roku 1900 — stale większy.

Ojciec urodził się w roku 1881, syn urodził się w roku 1917. Rozmowa odbyła się dnia 1. I. 1930 r.

95. Zagadka logiczna

Na pewnej wyspie mieszkały dwie rasy bardzo do siebie z wyglądu podobne: Fitumitu i Bajtata. Każdy Fitumitu mówił jednak zawsze tylko prawdę, żaden zaś Bajtata nigdy nie powiedział prawdy. Przyjezdny cudzoziemiec zapytał jednego z przechodniów (*P*) o jego przynależność rasową, ale nie dosłyszał odpowiedzi; zwrócił się więc do dwóch stojących obok tuziemców (*A* i *B*) z zapytaniem: co powiedział ów przechodzień? Na to *A* oświadczył, że przechodzień nazwał siebie Bajtata, a *B* twierdził, że przechodzień rzekł: Fitumitu. Na zapytanie cudzoziemca, czy przechodzień nie skłamał, obaj panowie *A* i *B* zaręczyli, że przechodzień powiedział prawdę. Do jakich ras należeli panowie *A* i *B* i przechodzień?

Jeżeli przechodzień należał do rasy Fitumitu, to na pytanie cudzoziemca odpowiedziałby: Fitumitu. Jeśliby zaś należał do rasy Bajtata, to na pytanie cudzoziemca nie powiedziałby, że jest Bajtata. Żaden z tuziemców nie mógł powiedzieć o sobie: Bajtata. Stąd wniosek, że tuziemiec *A* skłamał, a więc należy do rasy Bajtata, natomiast tuziemiec *B* powiedział prawdę, a więc należy do rasy Fitumitu.

Na drugie pytanie cudzoziemca prawdomówny tuziemiec zaręczył, że przechodzień nie skłamał; musimy więc przyjąć, że przechodzień *P* należał do rasy Fitumitu.

Czym wytłumaczyć, że na drugie pytanie cudzoziemca tuziemiec *A* (Bajtata) dał takie samo zaręczenie, jak *B* (Fitumitu)?

Otóż gdyby *A* stwierdził, że przechodzień skłamał, to tym samym dałby zaprzeczenie poprzednio podanej przez siebie *nieprawdziwej wiadomości*, jakoby przechodzień *P* zaliczał siebie do rasy Bajtata, i w ten sposób dałby mimo woli świadectwo prawdzie. Bajtata *A* uwikłał się wę własnym kłamstwie i chcąc dalej kłamać „konsekwentnie", musiał zaręczyć, podobnie jak Fitumitu *B*, że przechodzień powiedział o sobie prawdę; tylko że zaręczenie to odnosiło się do fałszywie przez niego podanej wypowiedzi przechodnia.

Gdyby cudzoziemiec naprzód zapytał tuziemców, czy przechodzień powiedział o sobie prawdę, a potem przyznał się, że nie dosłyszał odpowiedzi przechodnia, i poprosił o jej powtórzenie, to zachowanie się prawdomównego Fitumitu *B* w niczym by się nie zmieniło; natomiast Bajtata *A* na pierwsze pytanie zaręczyłby, że przechodzień skłamał, a na drugie pytanie — uwierzywszy, że cudzoziemiec nie dosłyszał odpowiedzi przechodnia, i pragnąc kłamać „konsekwentnie", by wprowadzić cudzoziemca w błąd — musiałby dać taką samą odpowiedź, jak Fitumitu, mianowicie stwierdzić, że przechodzień nazwał siebie Fitumitu.

W tym przypadku kłamstwo Bajtaty *A* byłoby skuteczne: ani cudzoziemiec, ani czytelnik *Parametra* (z którego to zadanie, podpisane literami M. H., zaczerpnęliśmy) nie mogliby rozwikłać zagadki. Widzimy na tym przykładzie, że dla zdemaskowania kłamcy ważny jest porządek stawianych mu pytań.

96. Jeszcze jedno zadanie logiczne

W pudle znajdują się kapelusze: 2 białe i 3 czarne. Trzy z tych kapeluszy włożono na głowy trzech panów *A*, *B* i *C*, którzy byli ustawieni „gęsiego" w ten sposób, że pan *A* widział przed sobą panów *B* i *C*, pan *B* widział tylko pana *C*, a pan *C* nie widział ani pana *A*, ani pana *B*. Żaden z nich nie widział swego kapelusza, nie odwracał się ani nie widział dwóch kapeluszy, które zostały w pudle. Zapytano pana *A*, jaki ma kapelusz; odpowiedział, że nie wie. Zapytano pana *B*; odpowiedział, że również nie wie. Wtedy pan *C* oświadczył: „Wobec tych odpowiedzi panów *A* i *B* już wiem, jaki mam na głowie kapelusz" — i podał uzasadnienie.

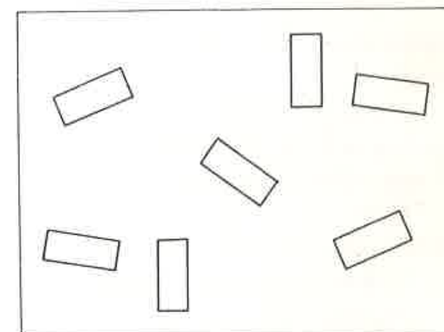
Niechaj Czytelnik (z zegarkiem w ręku) odtworzy rozumowanie pana *C*.

97. Gra geometryczna

W ciekawej książce autora radzieckiego J. Perelmana pod tytułem *Zanimatielnaja gieomietrija* [1]) znajdujemy następującą grę geometryczną:

Do gry potrzebny jest prostokątny arkusz papieru i jakiekolwiek jednakowe figury geometryczne mające środek symetrii, np. kości domina, pudełka od zapałek, jednakowe monety.

Grają dwie osoby. Losowanie rozstrzyga, kto ma rozpocząć grę. Gracz wylosowany kładzie pierwszy szton w dowolnym miejscu papieru. Potem drugi gracz kładzie szton w wolnym miejscu według swego wyboru. I tak po kolei obaj gracze kładą sztony dopóty, dopóki wystarczy wolnego miejsca.



Raz położonego sztonu przesuwać nie wolno. Przegrywa ten, kto już nie znajdzie wolnego miejsca na położenie sztonu, gdy na niego przyjdzie kolej.

Można znaleźć taki sposób gry, przy którym rozpoczynający grę zawsze wygrywa.

Otóż rozpoczynający grę powinien położyć pierwszy przedmiot w taki sposób, żeby środek symetrii przedmiotu trafił na środek arkusza papieru; gdy przyjdzie kolej na drugi ruch, gracz ten położy przedmiot symetrycznie do przedmiotu partnera względem środka papieru — i tak będzie postępował dalej.

Rzecz jasna, że jeżeli partner znajdzie dla swego przedmiotu wolne miejsce, to i pierwszy gracz znajdzie odpowiednie miejsce wolne — symetryczne względem środka papieru. A więc pierwszy gracz na pewno nie przegra. Przegrać musi partner, gdyż już nie potrafi znaleźć wolnego miejsca.

[1]) Tłumaczona na język polski pt. „Ciekawa geometria". Warszawa 1953 r., PZWS.

98. Krążenie po ciemku

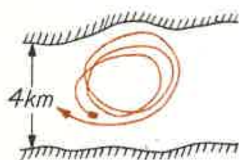
(Według J. Perelmana)

Z cytowanej przez nas książki „*Ciekawa geometria*" zaczerpnęliśmy temat następującej opowieści:

Na gładkim, zielonym lotnisku postawiono stu przyszłych lotników, którym zawiązano oczy i kazano iść wprost przed siebie. Poszli ... Z początku szli prosto, potem jedni zaczęli skręcać na prawo, inni na lewo, stopniowo zataczali kręgi i ... wrócili na swe dawne ślady.

Fizjolog norweski Guldberg poświęcił krążeniu po ciemku specjalne badanie i podał kilka wypadków takiego krążenia. Oto jeden z nich:

Trzej wędrowcy zamierzali w czasie śnieżnej nocy opuścić szałas i wydostać się z doliny o szerokości 4 km, by dojść do swego domu. W drodze jednak zboczyli na prawo i szli po linii krzywej opatrzonej na rysunku strzałką. Gdy przeszli pewną odległość i na podstawie rachuby czasu sądzili, że już doszli do celu — okazało się, że są w pobliżu szałasu, który opuścili. Gdy poszli w drogę po raz wtóry, zboczyli jeszcze mocniej na prawo — i wrócili do punktu wyjścia. To samo powtórzyło się za trzecim razem...



Jeszcze trudniej jest prowadzić łódź na morzu po linii prostej w noc ciemną, bezgwiezdną albo wśród gęstej mgły. Zanotowano wypadek — jeden z wielu — gdy wioślarze, postanowiwszy przepłynąć w czasie mgły cieśninę szerokości 4 km, byli dwukrotnie w pobliżu przeciwnego brzegu cieśniny, ale nie dotarli do tego brzegu, tylko zatoczywszy bezwiednie dwa kręgi wreszcie wylądowali w miejscu, z którego wystartowali.

To samo dzieje się ze zwierzętami. Podróżni z wypraw polarnych opowiadają o kręgach, które zataczają w śnieżnej pustyni zwierzęta zaprzężone do sań. Pies, który płynie z zawiązanymi oczami, zatacza w wodzie kręgi.

Czym tłumaczy się zagadkowa skłonność człowieka i zwierząt do krążenia — niemożność utrzymania prostego kierunku w ciemności?

J. Perelman daje takie wyjaśnienie:

Przypomnijmy sobie nakręcane zabawki dziecinne. Dlaczego się zdarza, że taka zabawka toczy się nie po linii prostej, ale zbacza z drogi? W tym ruchu po linii krzywej nikt nie będzie dostrzegał nic zagadkowego: po prostu kółka po prawej stronie i kółka po lewej stronie nie są równe.

Rzecz jasna, że żywe stworzenie tylko wtedy może się poruszać bez kontroli wzroku dokładnie po linii prostej, gdy mięśnie jego prawej i lewej strony pracują zupełnie jednakowo. Ale właśnie symetria ciała człowieka czy zwierzęcia nie jest doskonała; u olbrzymiej większości ludzi i zwierząt mięśnie prawej strony ciała są rozwinięte inaczej niż mięśnie strony lewej. Jest więc rzeczą naturalną, że piechur, który za każdym krokiem będzie wysuwał prawą nogę nieco dalej niż lewą, nie zdoła utrzymać się w linii prostej; jeśli oczy nie pomogą mu wyprostować drogi, to nieuchronnie będzie zbaczał na lewo. Tak też wioślarz, któremu gęsta mgła uniemożliwia orientację, będzie nieuchronnie skręcał, jeśli jego prawa ręka pracuje mocniej niż lewa. Jest to konieczność geometryczna.

Wyobraźmy sobie na przykład, że każdy krok stawiany lewą nogą jest o milimetr dłuższy niż krok stawiany prawą nogą. Gdy człowiek postawi każdą nogą na przemian tysiąc kroków, wtedy jego lewe kroki dadzą o 1000 mm, czyli o metr więcej niż prawe kroki. Będzie to zupełnie naturalne, gdy stopy będą kroczyły po kręgach koncentrycznych: lewa noga po kręgu zewnętrznym, prawa — po wewnętrznym. Przypuśćmy teraz, że odstęp między tymi kręgami wynosi $d = 10$ cm, czyli 0,1 m. Jeżeli promień wewnętrznego kręgu oznaczymy przez R, to promień zewnętrznego kręgu wynosić będzie $R + d$. Droga lewej stopy wynosi $2\pi(R + d)$, a droga prawej stopy wynosi $2\pi R$. Obliczmy różnicę:

$$2\pi(R + d) - 2\pi R = 2\pi d$$

Podstawiając $\pi = 3{,}14$ i $d = 0{,}1$ m stwierdzamy, że różnica ta wynosi 0,628 m, czyli 628 mm. Taki jest iloczyn, który powstanie, gdy różnicę długości lewego i prawego kroku pomnożymy przez liczbę kroków.

Jeżeli dla przykładu przyjmiemy, że wędrowcy norwescy zataczali kręgi o średnicy 2,8 km, czyli o długości 8800 m, a średnia długość kroku wynosiła 0,7 m, to każdy krąg stanowił 8800 : 0,7 = 12 600 kroków, w tym 6300 kroków „lewych" i tyleż kroków „prawych". Ale wiemy już, że łączna długość wszystkich kroków „lewych" na jednym kręgu jest o 628 mm większa niż łączna długość kroków „prawych". Wykonując dzielenie

$$628 \text{ mm} : 6300 = 0{,}1 \text{ mm}$$

stwierdzamy, że każdy krok „lewy" był zaledwie o 0,1 mm dłuższy od kroku „prawego". I oto ta nikła różnica długości kroków wystarcza do wywołania tak zadziwiającego efektu!

Niemożność utrzymania prostej linii nie stanowi dla człowieka cywilizowanego istotnej przeszkody: drogi, mapy, busola ratują go w większości przypadków przed skutkami tego braku.

Natomiast u zwierząt, a szczególnie u mieszkańców pustyń, stepów, bezkresnych obszarów morskich asymetria ciała, zmuszająca zwierzęta do zataczania kręgów zamiast linii prostych, stanowi ważny czynnik życiowy. Jak gdyby niewidzialnym łańcuchem przykuwa ona zwierzęta do ich miejsca urodzenia pozbawiając je możności zbytniego oddalenia się od tego miejsca. Lew, który waży się na daleką wycieczkę w pustynię, nieuchronnie musi powrócić. Mewy porzucające rodzime skały dla lotów w otwarte morze — muszą wrócić do gniazda. (Tym bardziej jednak zagadkowe są dalekie wędrówki ptaków przelotnych, które lecą w linii prostej ponad lądami i morzami).



99. Varia

I

Stara legenda głosi, że czeska królewna Libusza obiecała temu z trzech ubiegających się o nią rycerzy oddać swą rękę, który pierwszy rozwiąże zadanie następującej treści:

Ile śliwek mieści się w koszyku, z którego połowę całej zawartości i jedną śliwkę odda pierwszemu, drugiemu połowę reszty i jedną śliwkę, wreszcie trzeciemu połowę pozostałych i trzy śliwki, po czym kosz będzie pusty.

II

Wspomniany już Alkuin jest autorem takiego zadania:

Chart goni zająca, który jest przed nim o 150 stóp. Skok zająca wynosi 7 stóp, a skok charta, wykonany w tym samym czasie, 9 stóp.

Po ilu skokach chart dopędzi zająca?

III

W jednym zagrodzeniu, opowiada stare chińskie zadanie, były królik i kury. Razem było 35 głów i 94 nogi. Ile było kur, a ile królików?

Zadanie to przy pomocy algebry rozwiązuje się bardzo łatwo.

IV

Wieśniaczka przyniosła na targ jaja. Pierwszej kupującej sprzedała połowę całej posiadanej ilości i jedno jajko, drugiej — połowę reszty i jedno jajko, trzeciej — znów połowę pozostałych jajek i jedno jajko. Wówczas zostało jej w koszyku 10 jajek. Ile jajek miała pierwotnie?

V

Dziewięcioro dzieci podzieliło pomiędzy siebie posiadane jabłka. Pierwsze wzięło jedno jabłko i $\frac{1}{10}$ reszty, drugie 2 jabłka i $\frac{1}{10}$ reszty, trzecie 3 jabłka i $\frac{1}{10}$ reszty i tak dalej. Okazało się następnie, że wszystkie otrzymały po równej ilości jabłek. Po ile mianowicie?

VI

Było to w wieku XIX. Pewnego jegomościa zapytano, kiedy się urodził.

— Miałem pełnych lat x w roku x^2.

Obywatel ten urodził się w roku 1806.

$$1806 + 43 = 43^2$$

W wieku XX byłoby takie rozwiązanie:

$$1892 + 44 = 44^2$$

Ale jak dojść do tego?

VII

Staw zarasta rzęsa. Co dwa dni obszar zarośnięty rzęsą podwaja się. Cały staw zarósł rzęsą w ciągu 64 dni. Po ilu dniach ćwierć stawu była zarośnięta rzęsą?

VIII

Zdarzyło się to wtedy, kiedy nie znano ani samochodów, ani kolei, kiedy nawet królowie jeździli ,,rozstawnymi'' końmi.

Zapytano wówczas pewnego poczmistrza, ile koni zamówił król na zmianę zaprzęgu. Poczmistrz odpowiedział: ,,Połową zamówionych koni jeździ sam król, połową reszty jego minister, połową pozostałych koni i półkoniem jeździ służba, a pozostałych koni dosiada foryś''.

Ile zamówiono koni?



II

CIEKAWE WŁAŚCIWOŚCI LICZB I DZIAŁAŃ MATEMATYCZNYCH

UWAGI OGÓLNE

Rozdział ten będzie niewątpliwie najciekawszy, najbardziej porywający dla tych, którzy ulegli czarowi liczby. A czar to zaiste osobliwy, ale mający pewne podobieństwo do czaru muzyki, barwy, tańca, do czaru żywego słowa, w ogóle do czaru poezji. I jak każdy niemal był w swej młodości w większym lub mniejszym stopniu poetą, tak każdy prawie ulegał i ulega urokowi liczby.

Rozdział ten nie obejmuje oczywiście całego bogatego materiału z tej dziedziny zagadnień. Ale przecież — jak już zapowiedzieliśmy na wstępie — „ciąg dalszy" znajdzie Czytelnik w tomie drugim „Rozrywek matematycznych". Do przytoczonych tu ciekawych właściwości wielu liczb już nie będzie potrzeby powracać. Znajdą się natomiast nowe, odmienne, a niemniej pełne czaru...

1. Dziwy siódemki i dziewiątki

Gdy postęp arytmetyczny, którego pierwszym wyrazem i różnicą jest liczba 15 873, mnożyć będziemy przez 7, otrzymamy iloczyny bardzo dziwne. Liczby 15 873, 31 746, 47 619, 63 492, 79 365, 95 238, ..., 142 857, mnożone przez 7, dadzą zawsze liczbę złożoną z 6 razy powtórzonej tej samej cyfry:

$$15873 \cdot 7 = 111111$$
$$31746 \cdot 7 = 222222$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$79365 \cdot 7 = 555555$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$142857 \cdot 7 = 999999$$

Ciekawy ten zbieg cyfr łatwo można wyjaśnić, gdy zauważymy, że na przykład:

$$79365 \cdot 7 = (5 \cdot 15873) \cdot 7 = 5 \cdot (15873 \cdot 7) = 5 \cdot 111111$$

Trudniejsze do wytłumaczenia jest to niezwykłe zjawisko, że jeśli pomiędzy dwie cyfry drugiej potęgi liczby 7, to znaczy w środek liczby 49 wstawiać będziemy liczbę 48, to utworzone w taki sposób liczby, mianowicie:

$$49,\ 4\overset{48}{—}9,\ 44\overset{48}{—}89,\ 444\overset{48}{—}889,\ \ldots$$

będą zawsze pełnymi kwadratami:

$$49 = 7^2$$
$$4489 = 67^2$$
$$444889 = 667^2$$
$$44448889 = 6667^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$



Ale jeszcze ciekawsze „cudeńka" otrzymać można z kombinacji liczby 7 z liczbami 11 i 13 albo — jak kto woli — z liczbą 143 równą $11 \cdot 13$.

Otóż jeśli pomnożymy liczbę 143 przez którąkolwiek z 999 pierwszych w naturalnym porządku wielokrotności liczby 7, to w iloczynie otrzymamy zawsze liczbę złożoną z dwu liczb identycznych, na przykład:

$$28 \cdot 143 = 4004$$
$$315 \cdot 143 = 45045$$
$$2464 \cdot 143 = 352352$$
$$3591 \cdot 143 = 513513$$
$$5495 \cdot 143 = 785785$$
$$6993 \cdot 143 = 999999$$

A przy tym zauważyć należy, że powtarzająca się w iloczynie liczba równa się zawsze liczbie siódemek zawartych w mnożniku. W samej rzeczy:

$$28 : 7 = 4;\quad 315 : 7 = 45;\quad 2464 : 7 = 352 \text{ i tak dalej}$$

To dziwne na pierwszy rzut oka zjawisko wyjaśnia się nader prosto. Wystarczy stwierdzić, że $7 \cdot 143 = 1001$. Dlatego:

$$2464 \cdot 143 = (352 \cdot 7) \cdot 143 = 352 \cdot (7 \cdot 143) = 352 \cdot 1001 =$$
$$= 352 \cdot 1000 + 352 = 352352$$

Podobne rezultaty otrzymuje się mnożąc 77 przez 999 pierwszych wielokrotności liczby 13 albo też mnożąc 91 przez 999 pierwszych wielokrotności liczby 11.

W końcu drobny „żart" matematyczny: Jak można napisać 7 za pomocą dwójek?

$$7 = 2 + \frac{2}{2} + 2^2$$

A oto inne, jeszcze ciekawsze „nowe" pisownie 7:

$$7 = 3^2 - 2$$

$$7 = 2^3 - \frac{2}{2}$$

$$7 = 2^{2^2} - 3^2$$

$$7 = 3^3 - 2^2 - 2^{2^2}$$

Skoro przejść mamy kolejno od dziwów siódemki do dziwów dziewiątki, postawmy na granicy pomiędzy tymi dwiema najbardziej interesującymi cyframi zamiast kopca granicznego taką piramidkę iloczynów:

$$9 \cdot 7 = 63$$

$$99 \cdot 77 = 7623 = \frac{7}{\,}6\frac{2}{\,}3$$

$$999 \cdot 777 = 776223 = \frac{77}{\,}6\frac{22}{\,}3$$

$$9999 \cdot 7777 = 77762223 = \frac{777}{\,}6\frac{222}{\,}3$$

$$99999 \cdot 77777 = 7777622223 = \frac{7777}{\,}6\frac{2222}{\,}3$$

. . . .

W ten sposób dodając przed szóstką odpowiednią ilość siódemek, zawsze o jedną mniej niż jest dziewiątek czy siódemek w mnożnej i mnożniku, a przed trójką kładąc takąż ilość dwójek, możemy napisać iloczyn wynikający z pomnożenia dowolnej ilości dziesiątek przez tyleż siódemek.

Dziewiątka jest bardzo miłą cyfrą, zwłaszcza dla tych, którym z trudnością przychodzi zdobycie tej najważniejszej ze wszystkich „zdobyczy" matematycznych — tabliczki mnożenia.

Otóż można zupełnie nie uczyć się mnożenia przez 9. Po co sobie obciążać pamięć? Wystarczy mieć 10 palców u rąk, obie ręce położyć na stole i unosić odpowiedni palec, a mnożenie samo się dopełni i trzeba będzie tylko odczytać rezultat.





Jeśli np. chcemy pomnożyć 9 przez 3, podnosimy trzeci palec od lewej strony i czytamy: liczba palców w lewo od podniesionego będzie oznaczała dziesiątki iloczynu (2), a liczba palców w prawo — jedności (7). Jeśli chcemy 7 pomnożyć przez 9, unosimy siódmy palec od lewej strony i czytamy: 63.

— Jaka szkoda — pomyśli sobie niejeden z czytelników — że nie da się całej tabliczki mnożenia tak „przepalcować".

Poniżej wskażemy jeszcze sposób mnożenia na palcach przez 6, 7 i 8, nieco bardziej skomplikowany niż pierwszy, ale i tak jeszcze ogromnie prosty.



Wróćmy do dziewiątki. Można powiedzieć, że każda liczba składa się z dziewiątki wziętej odpowiednią ilość razy i powiększonej o sumę poszczególnych cyfr tej liczby. Oto przykłady:

$$745 = 81 \cdot 9 + (7 + 4 + 5)$$
$$214 = 23 \cdot 9 + (2 + 1 + 4)$$
$$84 = 8 \cdot 9 + (8 + 4)$$

W podobny sposób napisać możemy dowolną liczbę, np.

$$68504791 = (\text{wielokrotność } 9) + $$
$$+ (6 + 8 + 5 + 0 + 4 + 7 + 9 + 1)$$



Jeśli liczba jest napisana jedną cyfrą z wielu zerami, to równa się ona tej cyfrze pomnożonej przez liczbę napisaną tyloma dziewiątkami, ile zer prowadzi za sobą dana cyfra, i jeszcze powiększonej o tę samą cyfrę; na przykład:

$$8000 = 999 \cdot 8 + 8$$
$$700 = 99 \cdot 7 + 7$$
$$40 = 9 \cdot 4 + 4$$

Weźmy ciąg dziesięciu liczb naturalnych

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

i pomnóżmy te liczby przez 9, pisząc iloczyny w postaci:

09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90

Zauważymy, że pierwsze cyfry tych iloczynów stanowią ciąg naturalny od 0 do 9, drugie zaś cyfry tworzą postęp malejący od 9 do 0.

Podobną właściwość znajdziemy w jakimkolwiek ciągu kolejnych liczb naturalnych rozpoczynającym się od liczby zakończonej jedynką. Weźmy na przykład liczby:

231, 232, 233, ..., 239

Gdy pomnożymy je przez 9, otrzymamy:

2079, 2088, 2097, 2106, 2115, 2124, 2133, 2142, 2151

Ostatnie cyfry tych liczb stanowią ciąg naturalny liczb od 9 do 1, pierwsze zaś trzy cyfry tworzą serię liczb naturalnych: 207, 208, 209 i tak dalej.

Łatwe to jest do wytłumaczenia, jeśli się zważy, że pomnożyć jakąś liczbę całkowitą przez 9 znaczy to samo, co odjąć tę liczbę od jej dziesięciokrotności; na przykład:

$$254 \cdot 9 = 2540 - 254$$
$$7140 \cdot 9 = 71400 - 7140$$

Tych i tym podobnych drobnych spostrzeżeń nie można oczywiście zaliczać do rzędu jakichś odkryć niezwykłych, ale nie każdy je zna, a mogą się one nieraz bardzo przydać przy najprostszych nawet operacjach liczbowych.



Cały szereg tabliczek z ciekawymi rezultatami mnożenia przez 9 rozpoczniemy od tabliczki, w której warto przyjrzeć się poszczególnym kolumnom liczb i cyfr:

$1 \cdot 9 = 09$	$90 = 9 \cdot 10$
$2 \cdot 9 = 18$	$81 = 9 \cdot 9$
$3 \cdot 9 = 27$	$72 = 9 \cdot 8$
$4 \cdot 9 = 36$	$63 = 9 \cdot 7$
$5 \cdot 9 = 45$	$54 = 9 \cdot 6$



Oto inna tablica dająca pożyteczne spostrzeżenia.

Dziewiątka, pomnożona przez jakąkolwiek liczbę, albo odwrotnie: jakakolwiek liczba pomnożona przez 9, daje w rezultacie liczbę, której suma cyfr bądź równa się 9, bądź jest podzielna przez 9:

$9 \cdot 1 = 09$	$0 + 9 = 9$
$9 \cdot 2 = 18$	$1 + 8 = 9$
$9 \cdot 3 = 27$	$2 + 7 = 9$
$9 \cdot 4 = 36$	$3 + 6 = 9$
$9 \cdot 5 = 45$	$4 + 5 = 9$
$9 \cdot 6 = 54$	$5 + 4 = 9$
. . . . .	. . . . .
$9 \cdot 9 = 81$	$8 + 1 = 9$
$10 \cdot 9 = 90$	$9 + 0 = 9$
$11 \cdot 9 = 99$	$9 + 9 = 18$, a $1 + 8 = 9$
$12 \cdot 9 = 108$	$1 + 0 + 8 = 9$
$13 \cdot 9 = 117$	$1 + 1 + 7 = 9$
. . . . .	. . . . .
$49 \cdot 9 = 441$	$4 + 4 + 1 = 9$
$50 \cdot 9 = 450$	$4 + 5 + 0 = 9$
$51 \cdot 9 = 459$	$4 + 5 + 9 = 18$, a $1 + 8 = 9$
$52 \cdot 9 = 468$	$4 + 6 + 8 = 18$, a $1 + 8 = 9$
$53 \cdot 9 = 477$	$4 + 7 + 7 = 18$, a $1 + 8 = 9$
$54 \cdot 9 = 486$	$4 + 8 + 6 = 18$, a $1 + 8 = 9$
$55 \cdot 9 = 495$	$4 + 9 + 5 = 18$, a $1 + 8 = 9$
. . . . .	. . . . .



Z innym znów ciekawym rezultatem mnożenia przez 9 zapoznamy się w takiej tabelce:

$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$
$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$
$$123 \cdot 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \cdot 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111$$



Analogicznie ułożona jest następująca tabelka:

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \cdot 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \cdot 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \cdot 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \cdot 9 + 0 = 888888888$$
$$987654321 \cdot 9 - 1 = 8888888888$$



Aby pomnożyć jakąkolwiek liczbę przez 999, wystarczy wykonać jedno jedyne odejmowanie. Jeżeli na przykład trzeba pomnożyć 46538 przez 999, to piszemy liczbę 46538 raz jako odjemną, drugi raz jako odjemnik, przesuwając ją jednak za drugim razem o tyle miejsc w prawo, ile dziewiątek jest w mnożniku, i wykonujemy odejmowanie:

```
46538...
   46538
--------
46491462
```

Oto jest iloczyn poszukiwany. A dlaczego można stosować tę metodę?



Podobne uproszczenie zastosujemy w dzieleniu przez 999.

Przypuśćmy, że trzeba podzielić 248561 przez 999. Najpierw będziemy dzielili 248561 przez 1000; otrzymamy w ilorazie 248 i zostanie reszta 561. Zapiszmy:

$$248561 = 248 \cdot 1000 + 561$$

Ale $1000 = 999 + 1$, a więc

$$248 \cdot 1000 = 248 \cdot 999 + 248$$

Teraz widzimy, że

$$248561 = 248 \cdot 999 + (248 + 561)$$

Przyjrzyjmy się temu wzorowi: dzieląc 248561 przez 999 otrzymujemy w ilorazie 248 (czyli tyle jedności, ile tysięcy mieści się w dzielnej) i pozostaje reszta złożona z dwóch składników: 248 (jest to liczba tysięcy w dzielnej) i 561 (jest to końcówka dzielnej po odrzuceniu tysięcy).

Ale $248 + 561 = 809$, więc ostatecznie mamy:

$$248561 : 999 = 248 \text{ r } 809$$

Podobnie dzieląc 248561 przez 9999 otrzymamy iloraz 24 oraz resztę $24 + 8561$, czyli 8585.

Przy tym sposobie wykonania dzielenia może się zdarzyć, że zostanie reszta większa od dzielnika. Na przykład dzieląc 248798 przez 999 otrzymujemy iloraz 248 i resztę $248 + 798$, czyli 1046. Okazuje się, że reszta jest większa od dzielnika. Łatwo to naprawić: w liczbie 1046 mieści się dzielnik 999 raz 1, więc dodajemy 1 do ilorazu 248, a reszta wynosić będzie $1046 - 999 = 47$.

A oto szczególnie złośliwy przypadek:

$$1000999 : 999$$



Reszta z podziału jakiejkolwiek liczby przez 9 zawsze równa się reszcie otrzymanej z podziału sumy cyfr tejże liczby przez 9. Oto przykład (nie piszemy w nim ilorazu, ale tylko reszty):

```
1583 : 9          1 + 5 + 8 + 3 = 17
 9
 68
 63
  53              17 : 9
  45               9
   8               8
```

Jest to znany a bardzo pożyteczny sposób sprawdzania, czy dzielenie jest wykonane poprawnie.

Z powyższego oczywiście wynika, że jeśli od jakiejś liczby odejmiemy sumę cyfr tej liczby, to otrzymamy liczbę podzielną przez 9:

$$7523 - (7 + 5 + 2 + 3) = 7506$$

Otrzymaliśmy liczbę 7506, która dzieli się przez 9, gdyż jej suma cyfr $7 + 5 + 0 + 6$ dzieli się przez 9.

Suma kilku liczb, podzielona przez 9, daje resztę równą reszcie, która wynika z podziału sumy cyfr tych liczb przez 9; na przykład:

```
  458                        4 + 5 + 8 = 17
  165                        1 + 6 + 5 = 12
+ 578                        5 + 7 + 8 = 20
 1201       1201 : 9                     49
             9
            30
            27
             31              49 : 9
             27              45
              4               4
```

Liczba 49 daje taką samą resztę dziewiątkową 4, jaką daje suma 1201.



Różnica dwóch liczb daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę, jaką otrzymamy obliczając różnicę sumy cyfr odjemnej i sumy cyfr odjemnika, na przykład:

```
  526       389 : 9        5 + 2 + 6 = 13
– 137       36             1 + 3 + 7 = 11
  389        29                         2
             27
              2
```

Otrzymaliśmy taką samą resztę dziewiątkową 2, jaką daje różnica 389.

Reguła powyższa sprawia kłopot w przypadku, kiedy suma cyfr odjemnej jest mniejsza od sumy cyfr odjemnika. Wówczas należy dać sumie cyfr odjemnej tyle dziewiątek do pomocy, ile potrzeba, by umożliwić odjęcie sumy cyfr odjemnika.

Przykład:

```
 1001       323 : 9        1 + 0 + 0 + 1 =  2
– 678       27                 6 + 7 + 8 = 21
  323        53
             45
              8
```


Jak tu od 2 odjąć 21? Dodajemy liczbie 2 trzy dziewiątki do pomocy (przez co nie zmienimy reszty dziewiątkowej); mamy wówczas odejmowanie 29 – 21 = 8 i otrzymujemy resztę dziewiątkową 8 taką samą, jaką daje różnica 323.



Wreszcie resztę iloczynu dwóch liczb możemy znaleźć krótkim sposobem, mnożąc reszty dziewiątkowe obu czynników i znajdując resztę dziewiątkową tak otrzymanego iloczynu.

Oto przykład:

```
  124       3224 : 9       1 + 2 + 4 = 7
×  26       27                 2 + 6 = 8
  744        52
 248         45
 3224         74
              72
               2
```

Mnożymy reszty dziewiątkowe: $7 \cdot 8 = 56$. Iloczyn 56 daje resztę dziewiątkową 2 taką samą, jaką daje iloczyn 3224.



Opierając się na tej własności można podać ciekawy sposób dzielenia liczby wielocyfrowej przez 9.

Niechaj na przykład trzeba będzie wykonać dzielenie:

657524418 : 9

Obliczamy sumę cyfr danej liczby.

$$6 + 5 + 7 + 5 + 2 + 4 + 4 + 1 + 8 = 42$$

i po wykonaniu dzielenia 42 : 9 znajdujemy resztę dziewiątkową 6. Odejmując resztę 6 od dzielnej otrzymamy dzielenie 657524412 : 9, które wykona się bez reszty.



A samo wykonanie dzielenia można tak przeprowadzić: piszemy dzielną, już zmniejszoną o resztę dziewiątkową; nad ostatnią jej cyfrą piszemy zero i rozpoczynamy odejmowanie, jak gdyby ponad dzielną była napisana liczba wielocyfrowa zakończona zerem:

```
        0
657524412
---------
        8
```

Znalezioną cyfrę 8 różnicy piszemy na górze na lewo od zera i szukamy drugiej cyfry różnicy:

```
       80
657524412
---------
       68
```

Tak kontynuujemy odejmowanie aż do końca:

```
730582680
657524412
---------
 73058268
```

Różnica 73058268 jest jednocześnie ilorazem, którego szukaliśmy. Przypominamy, że przed rozpoczęciem odejmowania należy od dzielnej odjąć jej resztę dziewiątkową.



Jeśli napiszemy jakąkolwiek liczbę dwucyfrową, a następnie odejmiemy od niej liczbę utworzoną z tychże cyfr wziętych w odwrotnym porządku, to różnica zawsze dzielić się będzie przez 9; na przykład:

```
72     92     63
27     29     36
--     --     --
45     63     27
```

Ponadto, jak widać, różnica równa się liczbie 9 pomnożonej przez różnicę pomiędzy poszczególnymi cyframi danej liczby:

$$72 - 27 = 45 = 9 \cdot (7 - 2)$$

To spostrzeżenie przydać się może nieraz księgowym przy odszukiwaniu pomyłek w bilansach, pomyłek wynikłych z przestawienia cyfr w liczbach notowanych po jednej i po drugiej stronie ksiąg buchalteryjnych.



Jeśli weźmiemy liczbę trzycyfrową, w której pierwsza i ostatnia cyfra nie są jednakowe, i od tej liczby odejmiemy liczbę zestawioną z tych samych cyfr, tylko w odwrotnym porządku, to otrzymamy zawsze różnicę podzielną przez 9, przy czym cyfra środkowa będzie dziewiątką; na przykład:

$$563 - 365 = 198, \qquad 756 - 657 = 099$$



Ciekawe rezultaty daje podnoszenie do kwadratu liczb napisanych samymi dziewiątkami. Oto one:

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$
$$99999^2 = 9999800001$$

. . . .

Pisze się cyfry 8 i 1, następnie przed ósemką pisze się tyle dziewiątek, a przed jedynką tyle zer, z ilu dziewiątek, minus jedna, składa się liczba podnoszona do kwadratu.



Niektórych pasjonuje zagadnienie pisania jednej cyfry wielu znakami arytmetycznymi. Jak można na przykład napisać dziewiątkę wszystkimi dziesięcioma cyframi?

Oto dziewiątka w tej ekstraoryginalnej pisowni:

$$\frac{97524}{10836} \text{ albo } \frac{95823}{10647} \text{ albo } \frac{95742}{10638}$$

Należy zauważyć, że w formułach tych każda z dziesięciu cyfr jest użyta raz tylko jeden.

A oto dziewiątka pisana dziewięcioma cyframi bez użycia zera:

$$\frac{75249}{8361} \text{ albo } \frac{58239}{6471} \text{ albo } \frac{57429}{6381}$$

A jak można przy użyciu trzech tylko dziewiątek napisać cyfrę olbrzymią? Umieśćmy trzy dziewiątki w takiej pozycji:

$$9^{9^9}$$

Jest to dziewięć podniesione do potęgi, której wykładnikiem jest dziewięć podniesione do dziewiątej potęgi. Ale

$$9^9 = 387\,420\,489, \quad \text{więc } 9^{9^9} = 9^{387\,420\,489}$$

Inaczej mówiąc, trzeba dokonać 387 420 488 mnożeń przez dziewiątkę, by otrzymać poszukiwaną liczbę.



Otóż Laisant w swej ciekawej i z talentem napisanej książce pod tytułem: *Initiations mathématiques* stanowczo nie radzi tracić czasu na podobne poszukiwania.

„Pozwólcie mi was zapewnić — mówi Laisant — i powtórzcie to waszym uczniom, którzy sami później rzeczowo o tym się przekonają, że liczba

$$9^{9^9}$$

jeśliby ją napisać sposobem dziesiętnym, miałaby 369 692 128 cyfr.

Jeślibyśmy chcieli napisać ją na papierowej wstążce, to zakładając, że każda cyfra zajmie 4 milimetry, musielibyśmy rozporządzać wstążką długości ponad 1478 km.

Jest to nieco więcej niż podwójna odległość Paryża od Avignonu i z powrotem, licząc według drogi kolei żelaznej.

Czas potrzebny do napisania tej liczby, przyjmując, że na sekundę napisze się jedną cyfrę i że dziennie pracować się będzie 10 godzin, obejmie 28 lat i 48 dni, przy czym należałoby pracować bez żadnych przerw, to jest i w niedzielę, i we wszystkie święta.

Dla bliższej informacji powiem, że pierwsza cyfra poszukiwanej liczby jest 2, a ostatnia 9. Czyli zostawałoby do znalezienia nie więcej jak 369 692 126 cyfr. Niestety — pomyśleliście sobie — znajomość tych dwu cyfr niewiele ułatwia pracę. Jestem tego samego zdania".

2. Jedyne w swym rodzaju właściwości jedenastu



Odszukał je Marokańczyk Ibn-al-Banna i podał w książce, której tytuł brzmi na pozór bardzo kwieciście: *Talkhys amâli al hissâb*, ale przekłada się bardzo sucho: *Analityczny zbiór zadań rachunkowych*.

Zauważył on mianowicie, że aby otrzymać dowolną potęgę liczby 11, nie potrzeba koniecznie mnożyć mozolnie

$$11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot \ldots \ (n \text{ czynników}).$$

Można osiągnąć to nieco łatwiej przez zbudowanie takiej piramidy:

$$\begin{array}{ll} 11^1 = 11 & 1 + 1 = 2 \\ 11^2 = 121 & 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2 \\ 11^3 = 1331 & 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3 \\ 11^4 = 14641 & 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Na ostatnim miejscu stoi zawsze jedynka, dziesiątki każdej następnej potęgi równają się dziesiątkom poprzedniej potęgi + jedności, setki równają się setkom poprzedniej + dziesiątki i tak dalej.

Równie ciekawe cyfrowo rezultaty daje mnożenie takich zbiorowisk jedynek:

$$\begin{array}{c} 11 \cdot 111 = 1221 \\ 111 \cdot 11111 = 1233321 \\ 1111 \cdot 1111111 = 1234444321 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$



Jeszcze ciekawszą piramidę cyfr uformować można z kwadratów liczb złożonych z samych jedynek:

$$\begin{array}{r} 1^2 = 1 \\ 11^2 = 121 \\ 111^2 = 12321 \\ 1111^2 = 1234321 \\ 11111^2 = 123454321 \\ 111111^2 = 12345654321 \\ 1111111^2 = 1234567654321 \\ 11111111^2 = 123456787654321 \\ 111111111^2 = 12345678987654321 \end{array}$$



W. Ahrens w swym fundamentalnym dziele *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* dodaje takie jeszcze kombinacje z ostatnią równością w tabliczce z poprzedniej stronicy.

Jeśli obie jej części pomnożymy przez

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1,$$

czyli przez $9 \cdot 9$, to otrzymamy

$$999999999 \cdot 999999999 = 12345678987654321 \times$$
$$\times (1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$$

Liczby otrzymane jako kwadraty „jedynaczek" wykazują znów dalsze ciekawe właściwości:

$$1+2+1 = 4 = 2^2$$
$$1+2+3+2+1 = 9 = 3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1 = 16 = 4^2$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 25 = 5^2$$
$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1 = 36 = 6^2$$

. . . .

A prócz tego każdą z tych liczb można napisać w taki dość oryginalny sposób:

$$11^2 = 121 = \frac{22 \cdot 22}{1+2+1}$$

$$111^2 = 12321 = \frac{333 \cdot 333}{1+2+3+2+1}$$

$$1111^2 = 1234321 = \frac{4444 \cdot 4444}{1+2+3+4+3+2+1}$$

. . . .

Kto by chciał sobie ułatwić — bardzo zresztą łatwe — dzielenie przez 11, może korzystać ze skrótu przypominającego skrócone dzielenie przez 9.

Trzeba na przykład podzielić 345 785 przez 11. Pod ostatnią cyfrą dzielnej podpisujemy zero i rozpoczynamy odejmowanie w ten sposób, iż różnicę 5 piszemy przed zerem pod dziesiątkami, odejmujemy ją od 8, różnicę 3 piszemy pod setkami, odejmujemy ją od 7 i tak dalej:

$$\begin{array}{r} 345785 \\ 314350 \\ \hline 31435 \end{array}$$

Wynik tego odejmowania jest poszukiwanym ilorazem.

Obierzmy dowolną liczbę co najmniej czterocyfrową. Niech to będzie na przykład liczba 43357. Pod tą liczbą podpisujemy tę samą liczbę w taki sposób, żeby pierwsza cyfra podpisanej liczby stała pod czwartą cyfrą górnej liczby; tak podpisane liczby sumujemy:

$$\begin{array}{r} 43357 \\ 43357 \\ \hline 43400357 \end{array}$$

Jeżeli teraz sumę, która wypadnie, podzielimy po kolei przez 7, 11 i 13, to otrzymamy z powrotem liczbę obraną:

$$43400357 : 7 = 6200051$$
$$6200051 : 11 = 563641$$
$$563641 : 13 = 43357$$

Tłumaczy się to tym, że $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. W samej rzeczy, dodawaliśmy dwie liczby, które można w ten sposób napisać:

$$43357 \cdot 1000 + 43357 = 43357 \cdot (1000 + 1) = 43357 \cdot 1001,$$

a ponieważ $1001 : 7 = 143$, $143 : 11 = 13$ i $13 : 13 = 1$, więc po wykonaniu trzech dzieleń zostanie 43357.

Jeżeli obierzemy liczbę trzycyfrową, to powyższe dodawanie przeistoczy się w dopisywanie; na przykład:

$$\begin{array}{r} 345 \\ 345 \\ \hline 345345 \end{array}$$

I znowu mamy: $[(345345 : 7) : 11] : 13 = 43357$

Omawiając dziwy dziewiątki wskazaliśmy na ciekawe zjawisko, że jeśli od trzycyfrowej liczby odejmiemy jej „kontrliczbę", to różnica zawsze będzie wielokrotnością liczby 9. Teraz dodamy, że równocześnie jest ona wielokrotnością liczby 11; na przykład:

$$932 - 239 = 693 = 9 \cdot 7 \cdot 11$$
$$845 - 548 = 297 = 9 \cdot 3 \cdot 11$$

Jak to wytłumaczyć? Ot tak:

Przypuśćmy, że jakaś liczba trzycyfrowa (której pierwsza i trzecia cyfra muszą być różne) składa się z a setek, b dziesiątek i c jedności. Liczbę taką napiszemy w postaci: $100a + 10b + c$. Napisana na odwrót, przedstawi się tak: $100c + 10b + a$. Odejmując jedną liczbę od drugiej i dzieląc przez 9 otrzymamy:

$$\frac{100a + 10b + c - (100c + 10b + a)}{9} = \frac{99\,(a - c)}{9} = 11\,(a - c)$$

Jeżeli więc ktoś poda jakąś liczbę trzycyfrową, to pomnożywszy różnicę jej skrajnych cyfr przez 11 można momentalnie podać iloraz, który wynika z podziału przez 9 różnicy pomiędzy podaną liczbą i tąż liczbą napisaną wspak.

3. Ciekawe przypadki liczb 37, 41, 45 i niektórych innych

Wypiszmy postęp arytmetyczny, którego pierwszy wyraz i różnica są równe 3, mianowicie:

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27$$

Jeśli wyrazy tego postępu pomnożymy przez 37, to otrzymamy:

$$111,\ 222,\ 333,\ 444,\ 555,\ \ldots,\ 999$$

W tym nowym postępie zauważyć można, że nie tylko każdy wyraz składa się z trzech cyfr jednakowych, ale że suma tych cyfr równa się każdorazowej mnożnej:

$$1+1+1=3,\quad 2+2+2=6,\ \ldots\quad 9+9+9=27$$

Wyjaśnienie tego przypadku nie sprawia żadnej trudności.



Weźmy dowolną liczbę trzycyfrową (na przykład 238). Dopiszmy do tej liczby jej dopełnienie do 999 (w danym przypadku: 761). Otrzymamy liczbę, która ma tę dziwną własność, że zawsze jest podzielna przez 37, a iloraz z dzielenia jest z kolei podzielny przez 27, wreszcie drugi iloraz jest zawsze o 1 większy od liczby obranej na początku.

W samej rzeczy:

$$238$$
$$238761 : 37 = 6453$$
$$6453 : 27 = 239$$
$$239 = 238 + 1$$

Ten przypadek jest już trudniejszy do wyjaśnienia, ale wyjaśnia się tak:

Jeśli obraną liczbę oznaczymy przez a, to przeprowadzone przez nas manipulacje przedstawiają się, jak następuje:

$$a \cdot 1000 + (999 - a) = 999a + 999 = 999\,(a+1),$$

ale ponieważ

$$999 = 111 \cdot 9 = 37 \cdot 3 \cdot 9 = 37 \cdot 27,$$

więc

$$a \cdot 1000 + (999 - a) = 37 \cdot 27 \cdot (a+1)$$

Liczba 37, pomnożona przez sumę cyfr tejże liczby, daje w wyniku sumę trzecich potęg tych cyfr:

$$37 \cdot (3+7) = 3^3 + 7^3,$$



a ta sama liczba 37, powiększona o iloczyn jej cyfr, daje w wyniku sumę kwadratów obu cyfr:

$$37 + 3 \cdot 7 = 3^2 + 7^2$$

Wreszcie ciekawy jest iloczyn liczby 37 i obu jej cyfr:

$$37 \cdot 3 \cdot 7 = 777$$



Najciekawszą może jednak własnością tej liczby jest fakt, że niektóre jej wielokrotności przy kolejnym, ściśle mówiąc: przy cyklicznym przestawianiu cyfr nie tracą tej własności, że są podzielne przez 37; na przykład:

$259 = 37 \cdot 7$	$185 = 37 \cdot 5$	$296 = 36 \cdot 8$
$592 = 37 \cdot 16$	$518 = 37 \cdot 14$	$629 = 37 \cdot 17$
$925 = 37 \cdot 25$	$851 = 37 \cdot 23$	$962 = 37 \cdot 26$



Podobnie godne zanotowania zjawisko obserwujemy na niektórych liczbach w stosunku do liczby 41.

Na przykład:

$$17589 = 41 \cdot 429$$
$$75891 = 41 \cdot 1851$$
$$58917 = 41 \cdot 1437$$
$$89175 = 41 \cdot 2175$$
$$91758 = 41 \cdot 2238$$





Liczba 45 składa się z czterech liczb: 8, 12, 5 i 20, inaczej mówiąc: $45 = 8 + 12 + 5 + 20$. Jeśli na tych czterech liczbach dokonamy czterech działań z dwójką, otrzymamy zawsze w rezultacie 10; mianowicie:

$$8 + 2 = 10$$
$$12 - 2 = 10$$
$$5 \cdot 2 = 10$$
$$20 : 2 = 10$$
$$\overline{45}$$



Ale nie tylko liczba 45 rozkłada się na takie części. Własność tę ma każda liczba postaci $c = a(b + 1)^2$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami naturalnymi. Otóż liczbę c łatwo rozłożyć na takie cztery składniki:

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4,$$

żeby z nich można było ułożyć cztery działania:

$$c_1 + b = ab$$
$$c_2 - b = ab$$
$$c_3 \cdot b = ab$$
$$c_4 : b = ab$$

Na przykład liczba 400 daje pięć rozkładów:

27 + 9 = 36	60 + 4 = 64	72 + 3 = 75
45 − 9 = 36	68 − 4 = 64	78 − 3 = 75
4 · 9 = 36	16 · 4 = 64	25 · 3 = 75
324 : 9 = 36	256 : 4 = 64	225 : 3 = 75
400	400	400

0 + 19 = 19	99 + 1 = 100
38 − 19 = 19	101 − 1 = 100
1 · 19 = 19	100 · 1 = 100
361 : 19 = 19	100 : 1 = 100
400	400



Wróćmy do liczby 45. Jest ona sumą dziewięciu cyfr wartościowych:

$$45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Nikt nie zaprzeczy, że od sumy kilku liczb można odjąć sumę kilku liczb, byle nie większą od tamtej sumy. Za odjemną weźmy sumę dziewięciu cyfr wartościowych w porządku odwróconym, a za odjemnik — sumę tychże cyfr w naturalnym porządku:

$$\begin{array}{r} 9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ \hline 8+6+4+1+9+7+5+3+2 \end{array}$$



Odejmowanie wykonaliśmy tak, jak zwykle, zaczynając od prawej strony: 9 od 1 odjąć nie można, więc „pożyczamy" 1 od sąsiedniej cyfry po lewej stronie; teraz mamy 11 — 9 = 2. Zamiast 2 zostało 1, lecz 8 od 1 odjąć nie można, więc „pożyczamy" 1 od sąsiedniej cyfry po lewej stronie i mamy 11 — 8 = 3. Tak postępując dalej aż do końca, otrzymamy w wyniku odejmowania znowu sumę dziewięciu cyfr wartościowych, tylko pomieszanych. Ale suma ta wynosi 45, akurat tyle, co w odjemnej i odjemniku; mamy więc paradoksalne odejmowanie

$$45 - 45 = 45$$

Odłóżmy żart na stronę. Mamy jednak zupełnie poprawne odejmowanie

$$\begin{array}{r} 987654321 \\ -\ 123456789 \\ \hline 864197532 \end{array}$$

tym osobliwe, że w odjemnej i odjemniku występują uporządkowane szyki cyfr, a w różnicy występują te same cyfry, tylko już nie są ustawione „według wzrostu".



A gdy jesteśmy już przy owej liczbie składającej się z kolejnych dziewięciu cyfr wartościowych, to nadmienimy nawiasowo, że liczba ta ma ponadto tę własność, iż mnożona przez 1, 2, 4, 5, 7 lub 8, czyli przez każdą z cyfr niepodzielnych przez 3, zawsze da w iloczynie liczbę, w której żadna cyfra się nie powtarza. Oto pięć iloczynów:

$$2 \cdot 123456789 = 246913578$$
$$4 \cdot 123456789 = 493827156$$
$$5 \cdot 123456789 = 617283945$$
$$7 \cdot 123456789 = 864197523$$
$$8 \cdot 123456789 = 987654312$$

A więc suma cyfr każdego z tych iloczynów również wynosi 45.

4. Coś niecoś o 100

O tej pięknej, okrągłej liczbie niewiele na ogół jest do powiedzenia; coś niecoś jednak się znajdzie. Oto na podobieństwo 45 można podzielić 100 na cztery takie części $12 + 20 + 4 + 64$, że dokonując na nich kolejno wszystkich czterech działań z czwórką otrzymamy zawsze w rezultacie 16:

$$\begin{aligned} 12 + 4 &= 16 \\ 20 - 4 &= 16 \\ 4 \cdot 4 &= 16 \\ 64 : 4 &= 16 \\ \hline 100 & \end{aligned}$$



Dalej, 100 równa się sumie sześcianów pierwszych czterech liczb naturalnych: $100 = 1 + 8 + 27 + 64 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$



Głównie jednak słynne jest 100 z tego, że istnieją różne dziwaczne sposoby wyrażania tej liczby wszelkimi innymi cyframi, byle tylko nie... jedynką z dwoma zerami.

Można ją napisać pięcioma jednakowymi cyframi:

$$111 - 11 \qquad\qquad 3 \cdot 33 + (3 : 3)$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \qquad\qquad 5 \cdot (5 + 5 + 5 + 5)$$

Można ją też napisać sześcioma dziewiątkami: $99\frac{99}{99}$

Ciekawe jest wypisanie liczby 100 przy użyciu wszystkich dziewięciu cyfr wartościowych: $100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$

A oto dalsze kombinacje:

$$75 + 24 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18},$$

$$91 + \frac{7524}{836}, \qquad 91 + \frac{5742}{638}, \qquad 91 + \frac{5823}{647},$$

$$94 + 5 + \frac{38}{76} + \frac{1}{2}, \qquad 94 + \frac{1578}{263},$$

$$96 + \frac{2148}{537}, \qquad 96 + \frac{1428}{357}, \qquad 96 + \frac{1752}{438}$$

Wreszcie parę zapisów z dziesięcioma cyframi:

$$50 + 49 + \frac{1}{2} + \frac{38}{76}, \qquad 78 + 21 + \frac{3}{6} + \frac{45}{90}$$

Można całymi setkami wynajdywać podobne sposoby pisania setki.

5. Liczba kolista

Jedną z najbardziej tajemniczych liczb jest liczba 142 857.

Liczbę tę otrzymuje się przy zamianie ułamka $\frac{1}{7}$ na ułamek dziesiętny, to znaczy przy wykonywaniu dzielenia 1 : 7. A mianowicie:

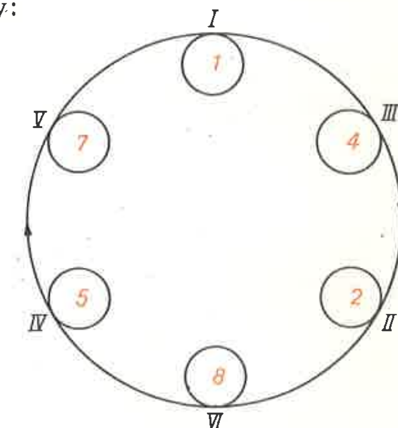
```
0,142857
1 : 7
10
 30
  20
   60
    40
     50
      1
```

W wyniku dzielenia mamy 0,142857 i zostaje jeszcze reszta 1 — ta sama, która była na początku. Gdy będziemy kontynuowali dzielenie, zaczną się powtarzać cyfry 142857 — bez końca. Liczba nasza stanowi okres ułamka dziesiętnego, który powstaje przy rozwinięciu ułamka $\frac{1}{7}$ na ułamek dziesiętny.

Jeżeli będziemy ją mnożyć kolejno przez 2, 3, 4, 5 i 6, to otrzymamy iloczyny złożone z tych samych cyfr, tylko ustawionych w odmiennym porządku, i to w porządku nie byle jakim.

Wystarczy przyjrzeć się poniższej tabliczce oraz kołu mieszczącemu owe cyfry:

I. $1 \cdot 142857 = 142857$
II. $2 \cdot 142857 = 285714$
III. $3 \cdot 142857 = 428571$
IV. $4 \cdot 142857 = 571428$
V. $5 \cdot 142857 = 714285$
VI. $6 \cdot 142857 = 857142$



Warto również dodać parami iloczyny I i VI, II i V, III i IV.

Mnożąc tę tajemniczą liczbę 142 857 przez 7 otrzymujemy sześć dziewiątek: 999 999.

Pomnóżmy teraz 142 857 przez 8; wypadnie bardzo ciekawy iloczyn 1 142 856, gdy bowiem w tej liczbie pierwszą cyfrę przeniesiemy na koniec i dodamy do ostatniej, to otrzymamy z powrotem liczbę pierwotną 142 857. Postępując w ten sam sposób z różnymi mnożnikami otrzymywać będziemy zawsze liczby pisane tymi samymi cyframi 1, 4, 2, 8, 5, 7 i w tym samym kolistym porządku:

$8 \cdot 142\,857 = 1\,142\,856\ (142\,857)$
$9 \cdot 142\,857 = 1\,285\,713\ (285\,714)$
$10 \cdot 142\,857 = 1\,428\,570\ (428\,571)$
$11 \cdot 142\,857 = 1\,571\,427\ (571\,428)$
. . . .
$23 \cdot 142\,857 = 3\,285\,711\ (285\,714)$
. . . .
$89 \cdot 142\,857 = 12\,714\,273\ (714\,285)$

W tym ostatnim mnożeniu wypadła liczba ośmiocyfrowa, trzeba więc zabrać dwie pierwsze cyfry i dodać do dwóch ostatnich. Podobnie postąpić należy z trzema pierwszymi cyframi przy mnożeniu

$$2313 \cdot 142\,857 = 330\,428\,241 \; (428\,571)$$

Zawsze tylko iloczyny przez liczby podzielne przez 7 stanowić będą wyjątki, gdyż po dokonaniu wyżej wskazanych przeniesień dają liczby złożone z samych tylko dziewiątek.

Nie zawadzi dodać tu jeszcze kilka drobnych spostrzeżeń o tej liczbie tajemniczej. Oto jeśli weźmiemy którykolwiek z iloczynów otrzymywanych przy mnożeniu jej przez pierwsze sześć cyfr wartościowych i rozbijemy go na trzy części dwucyfrowe, to zawsze otrzymamy albo 2, 4, 6, 8, 10, 12 pomnożone przez 7, albo któryś z tych iloczynów + 1; na przykład:

14 | 28 | 57	42 | 85 | 71
$14 = 7 \cdot 2$	$42 = 7 \cdot 6$
$28 = 7 \cdot 4$	$85 = 7 \cdot 12 + 1$
$57 = 7 \cdot 8 + 1$	$71 = 7 \cdot 10 + 1$

Mnożąc 142 857 przez 326 451 otrzymujemy wynik, któremu warto się przypatrzyć, by dostrzec nowe ciekawostki:

```
     142857
   × 326451
     142857
    714285
   571428
  857142
 285714
428571
46635810507
```

```
  810507
+  46635
  857142
```



Na czymże polega tajemnica owej liczby 142 857, istotnie „niesamowitej"?

Kto sam nie zdoła odgadnąć, odnajdzie wyjaśnienie w drugim tomie rozrywek matematycznych pod tytułem *Śladami Pitagorasa*. Tam będzie właściwe miejsce do takich i podobnych wtajemniczeń.

6. Słówko o ośmiu cyfrach bez ósemki i o ósemce bez ośmiu cyfr

Liczba składająca się z ośmiu kolejnych cyfr wartościowych bez ósemki przedstawia się oczywiście tak: 12 345 679. Cieszy się ona tym przywilejem, iż mnożona kolejno przez liczbę 9 i jej wielokrotności wzięte z tabliczki mnożenia, a więc przez liczby

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81

daje w iloczynie liczbę napisaną dziewięcioma jednakowymi cyframi:

$$9 \cdot 12345679 = 111111111$$
$$18 \cdot 12345679 = 222222222$$
$$27 \cdot 12345679 = 333333333$$
. . . .
$$63 \cdot 12345679 = 777777777$$
$$72 \cdot 12345679 = 888888888$$
$$81 \cdot 12345679 = 999999999$$

Jak widzimy, dziewięciokrotnie występująca w iloczynie cyfra oznacza, ile dziewiątek zawiera w sobie mnożnik, a zarazem jest to różnica tego mnożnika i najbliższej mu od góry liczby zakończonej zerem; na przykład

$10 - 9 = 1, \quad 20 - 18 = 2, \quad \ldots, \quad 80 - 72 = 8, \quad 90 - 81 = 9$

Nie dość na tym: owa liczba dziewięciocyfrowa, mnożona przez liczbę 3 lub jej wielokrotności, daje iloczyny utworzone z trzykrotnie powtórzonych grup trzycyfrowych; na przykład:

$$6 \cdot 12345679 = 74074074$$
$$15 \cdot 12345679 = 185185185$$
$$21 \cdot 12345679 = 259259259$$

Czy tak będzie bez końca? Niechaj Czytelnik sam ustali, gdzie leży kres takiego postępowania.



A jeśli pomnożymy 12345679 przez 8, czyli przez cyfrę, której właśnie brakuje w naszej liczbie — to co otrzymamy?

Otóż otrzymamy liczbę napisaną ośmioma kolejnymi cyframi bez jedynki, ale w porządku odwróconym:

$$8 \cdot 12345679 = 98765432$$

Jeżeli w tym mnożeniu rozłożymy 12345679 na 12345678 i 1, to otrzymamy taki zapis:

$$8 \cdot 12345678 + 8 = 98765432$$

Można ułożyć taką na czubku stojącą piramidę liczbową:

$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$
$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$
$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$
$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$
$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$
$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$
$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$
$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$

Nie ma chyba rozsądnego człowieka, który by liczbom przypisywał jakieś magiczne własności. Ale są ludzie, którzy do pewnych liczb mają sympatię, a nie lubią innych.

Przypuśćmy, że czyjąś ulubioną cyfrą jest 7. Można temu komuś zrobić miłą niespodziankę zaproponowawszy, by pomnożył 123456789 przez 7 · 9, czyli przez 63. W wyniku otrzyma same niemal siódemki:

```
 123456789
 ×      63
 ---------
 370370367
740740734
----------
7777777707
```

Jeśli ktoś inny jest sympatykiem ósemki, niechaj mnoży daną liczbę przez 8 · 9, czyli przez 72. Kto zaś przepada za trójką, ma mnożyć przez 3 · 9, czyli przez 27. Zawsze jednak zaplącze się jedno zero.

Na zakończenie powiemy, że liczba 12345679 jest to okres dziesiętnego ułamka okresowego, który powstaje przy zamianie ułamka $\frac{1}{81}$ na ułamek dziesiętny, albo też — co na jedno wychodzi — przy wykonywaniu dzielenia 1 : 81. Mianowicie:

```
0,012345679
-----------
1 : 81
100
 190
  280
   370
    460
     550
      640
       730
         1
```

I dalej powtórzą się cyfry 012345679, i znowu, i znowu...

7. Odwracalne mnożenia

Tak można by nazwać mnożenia, które po odwróceniu, to znaczy czytane wspak — dają iloczyny odwróconych czynników, jakby w lustrze odbitych.

Oto przykłady:

2 · 41 = 82	28 = 14 · 2
21 · 32 = 672	276 = 23 · 12
221 · 312 = 68952	25986 = 213 · 122

Kto by chciał sam inne takie liczby „odwracalne" odnaleźć, powinien wziąć pod uwagę, iż musi unikać cyfr, które, wzajemnie pomnożone, dają iloczyn większy niż 9.



„Odwracalne" bywają również kwadraty liczb dwucyfrowych oraz trzycyfrowych; na przykład:

12 · 12 = 144	441 = 21 · 21
13 · 13 = 169	961 = 31 · 31

102 · 102 = 10404	40401 = 201 · 201
103 · 103 = 10609	90601 = 301 · 301
112 · 112 = 12544	44521 = 211 · 211
122 · 122 = 14884	48841 = 221 · 221

Kto ma ochotę, niech poszuka innych jeszcze podobnych kwadratów; niewiele już, niestety, odnajdzie.



Niezupełnie „odwracalne", lecz zbliżone do nich są kwadraty składające się z tych samych cyfr, tylko w odmiennym porządku. Oto przykłady:

$13^2 = 169$	$157^2 = 24\,649$	$913^2 = 833\,569$
$14^2 = 196$	$158^2 = 24\,964$	$914^2 = 835\,396$

A oto sześciany tego rodzaju:

$$345^3 = 41\,063\,625$$
$$384^3 = 56\,623\,104$$
$$405^3 = 66\,430\,125$$



Następująca para liczb jest tym ciekawsza, że nie tylko kwadraty, ale i kwadraty kwadratów składają się z tych samych cyfr:

$32^2 = 1024 \qquad 32^4 = 1048576$
$49^2 = 2401 \qquad 49^4 = 5764801$

Inną odmianę takich liczb cyfrowo „spowinowaconych" stanowią liczby, których iloczyny składają się z cyfr znajdujących się w mnożnej i w mnożniku; na przykład:

$15 \cdot 93 = 1395 \qquad 321 \cdot 975 = 312975$
$35 \cdot 41 = 1435 \qquad 681 \cdot 759 = 516879$
$21 \cdot 87 = 1827 \qquad 843 \cdot 876 = 738468$
$27 \cdot 81 = 2187 \qquad 902 \cdot 875 = 789250.$

Takich liczb „spowinowaconych" można odnaleźć jeszcze wiele, ale poszukiwanie ich jest żmudne, a triumf odnalezienia niewielki...



Pewien matematyk francuski nadesłał w roku 1948 do amerykańskiego miesięcznika matematycznego *American Monthly* zadanie i żądał w nim znalezienia takiej liczby naturalnej n, która spełnia warunek

$$n^3 = 19000458461599776807277716631,$$

a także prosił o sprawdzenie, że nie tylko sama ta 29-cyfrowa liczba dzieli się przez n, ale i każde z dwudziestu ośmiu jej przestawień cyklicznych dzieli się przez n bez reszty.

Aby ułatwić Czytelnikowi pracę wyrażamy przypuszczenie, że chodzi tu o liczbę $n = 2668423111$. Tyle namozoliliśmy się nad poszukiwaniem owej liczby n, że nie mamy już sił na sprawdzenie i prosimy o to Czytelnika.

8. Liczby najłatwiejsze do mnożenia

Jest taka liczba kończąca się cyfrą 2, że jeśli ową dwójkę przestawimy na początek liczby, to otrzymamy liczbę dokładnie 2 razy większą od poprzedniej. Inaczej mówiąc: w liczbie tej mnożenie przez 2 dokona się przez proste przesunięcie dwójki z końca na pierwsze miejsce.

Oto owa liczba i jej iloczyn przez 2:

105263157894736842
210526315789473684

W jaki sposób można było taką liczbę odnaleźć?

W sposób bardzo prosty. Skoro jej ostatnia cyfra jest dwójką, a po przesunięciu owej cyfry 2 na czoło szeregu cyfr mamy otrzymać liczbę podwojoną, to przedostatnia cyfra musi być 4, trzecia od końca 8, przed nią 6, przed tym stać musi 3... i tak dalej, aż dojdziemy do 0, którego podwoić nie można.

Cyfry tak znalezionej liczby można wypisać dwukrotnie:

105263157894736842105263157894736842

albo też trzykrotnie, czterokrotnie i tak dalej, a własność łatwego mnożenia otrzymanej liczby przez 2 będzie zachowana.



W ten sam sposób odszukać można liczbę, która po przestawieniu cyfry 4 z końca na początek staje się 4 razy większa. Będą to liczby znacznie krótsze, mianowicie:

102564
410256

I znowu można wypisać cały szereg cyfr dwukrotnie, trzykrotnie i tak dalej, a otrzymane liczby zachowają właściwość łatwego mnożenia przez 4.



A czy można otrzymać liczbę o podobnej budowie kończącą się na 3 lub 5? Kto nie zdoła z góry na to pytanie odpowiedzieć, niechaj robi próby, musi jednak uzbroić się w cierpliwość...

A oto pewien rodzaj liczb łatwych do dzielenia. Aby podzielić liczbę 8712 przez 4, wystarcza ją napisać w odwrotnym porządku: 2178.

Istotnie:

$$\frac{8712}{2178} = 4$$

Można cyfry tej liczby powtórzyć wielokrotnie, a łatwość dzielenia przez 4 będzie zachowana; na przykład:

$$\frac{871287128712}{217821782178} = 4$$

Można też między 87 i 12 wpakować jedną lub wiele dziewiątek — i znowu dzielenie przez 4 jest łatwe:

$$\frac{879912}{219978} = 4$$

Jeżeli teraz będziemy chcieli powtarzać liczby „nafaszerowane" dziewiątkami, to musimy rozmieścić dziewiątki symetrycznie, aby przy odwracaniu liczby dziewiątki te zostały na miejscu; na przykład:

$$\frac{879991287912879128799912}{219997821978219782199978} = 4$$

Ponadto można przy powtarzaniu liczb przegradzać je zerami, byle tylko zera były rozmieszczone symetrycznie, tak aby przy odwracaniu liczb wszystkie zera zostały na miejscu; na przykład:

$$\frac{879912087120000087120879912}{219978021780000021780219978} = 4$$

Podobne własności ma jeszcze liczba 9801, która przez samo tylko odwrócenie porządku cyfr da się podzielić przez 9, a mianowicie:

$$9801 : 9 = 1089$$

Ale o liczbie 1089 pomówimy osobno.



9. O liczbie 1089 i niektórych innych

Weź jakąkolwiek liczbę trzycyfrową, w której liczba setek jest większa od liczby jedności. Od tej liczby odejmij liczbę „odwróconą", na przykład:

$$\begin{array}{r} 832 \\ -\ 238 \\ \hline 594 \end{array} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{r} 726 \\ -\ 627 \\ \hline 099 \end{array}$$

Jeżeli różnica nie będzie miała setek, to wpisz w miejsce setek cyfrę 0, aby otrzymać różnicę trzycyfrową. Do tej różnicy dodaj liczbę „odwróconą", a powiem Ci, że w każdym wypadku otrzymasz w wyniku dodawania liczbę 1089; na przykład:

$$\begin{array}{r} 594 \\ +\ 495 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 099 \\ +\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Liczbę 1089 bardzo łatwo pomnożyć przez 9, wystarcza bowiem tylko „odwrócić" tę liczbę:

$$\begin{array}{r} 1089 \\ \times\ 9 \\ \hline 9801 \end{array}$$

Tę samą własność mają liczby:

$$\begin{array}{r} 10989 \\ \times\ 9 \\ \hline 98901 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 109989 \\ \times\ 9 \\ \hline 989901 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1099\ldots9989 \\ \times\ 9 \\ \hline 9899\ldots9901 \end{array}$$

oraz iteracje tych liczb przedzielonych lub nie przedzielonych zerami, na przykład:

$$\begin{array}{r} 108910891089 \\ \times\ 9 \\ \hline 980198019801 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 109989000109989 \\ \times\ 9 \\ \hline 989901000989901 \end{array}$$



Pomnóżmy liczbę 1089 przez 2 i przez 8:

$$\begin{array}{r} 1089 \\ \times\ 2 \\ \hline 2178 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1089 \\ \times\ 8 \\ \hline 8712 \end{array}$$

Stąd widzimy, że jeżeli liczbę 2178 pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę „odwróconą".

Tę samą własność mają liczby

21978, 219978, 2199...9978

oraz ich iteracje przedzielone lub nie przedzielone zerami; na przykład:

$$\begin{array}{r} 21780002178 \\ \times \quad 4 \\ \hline 87120008712 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 219978219978 \\ \times \quad 4 \\ \hline 879912879912 \end{array}$$

Porównajmy jeszcze iloczyny:

$$\begin{array}{r} 1089 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3267 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1089 \\ \times \quad 7 \\ \hline 7623 \end{array}$$

a także iloczyny:

$$\begin{array}{r} 1089 \\ \times \quad 4 \\ \hline 4356 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1089 \\ \times \quad 6 \\ \hline 6534 \end{array}$$

W obu przypadkach otrzymujemy liczby „odwrócone". Wreszcie mnożenie:

$$\begin{array}{r} 1089 \\ \times \quad 5 \\ \hline 5445 \end{array}$$

daje iloczyn, który jest sam dla siebie „odwrócony". I tak samo będzie, jeżeli na przykład weźmiemy

$$\begin{array}{r} 10998900109989 \\ \times \quad 5 \\ \hline 54994500549945 \end{array}$$



10. Różne drobne ciekawostki liczbowe

Liczba 119, dzielona przez 2, daje resztę 1; dzielona przez 3, daje resztę 2; dzielona przez 4, daje resztę 3; dzielona przez 5, daje resztę 4; dzielona przez 6, daje resztę 5; przez 7 zaś dzieli się bez reszty. Przy tym

119 : 2 = 59 r 1
119 : 3 = 39 r 2
119 : 4 = 29 r 3
119 : 6 = 19 r 5

Druga cyfra ilorazu w tych czterech przypadkach jest zawsze 9, pierwsze zaś cyfry są te same, co w resztach tylko w odwrotnym porządku.
Dodać też można, że liczba ta, dzielona przez 8, daje resztę 7.



Liczbę 225 można kilku sposobami rozłożyć na postęp, którego pierwszym wyrazem jest 1:

$$225 = 1 + 75 + 149$$
$$225 = 1 + 23 + 45 + 67 + 89$$
$$225 = 1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43 + 49$$

Czy można w podobny sposób rozłożyć liczbę 225 na postęp o siedmiu wyrazach?



Liczbę 228 można kilku sposobami rozłożyć na postępy o jednakowym wyrazie początkowym:

$$228 = 18 + 44 + 70 + 96$$
$$228 = 18 + 26 + 34 + 42 + 50 + 58$$
$$228 = 18 + 21 + 24 + 27 + 30 + 33 + 36 + 39$$

I znowu pytanie: czy istnieją inne podobne rozkłady liczby 228? Jest to łatwa a bardzo interesująca okazja do otrzymania wielu ciekawych kombinacji. Warto spróbować.



Liczby 125, 250 i 375 mają tę cechę wspólną i tym wyróżniają się od innych, że aby je podzielić przez 5, wystarczy przekreślić pierwszą ich cyfrę:

125 : 5 = 25, 250 : 5 = 50, 375 : 5 = 75

Można by je więc nazwać liczbami najłatwiejszymi do dzielenia. Tak samo łatwo wykonać dzielenia:

1125 : 9, 2250 : 9, 3375 : 9, 4500 : 9, 5625 : 9, 6750 : 9, 7875 : 9.

Czy są inne takie dzielenia? Kto ma chęć, niechaj szuka.

Liczba 36 ma tę właściwość, że iloczyn jej cyfr równa się połowie tej liczby, a suma cyfr równa się ćwierci liczby. Ponadto liczba 36 ma tę samą sumę cyfr, co jej kolejne wielokrotności:

72, 108, 144, 180, 216, 252 (tu się urywa...)

Suma 36 pierwszych liczb naturalnych, to znaczy:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 36$$

równa się 666, a suma cyfr $6 + 6 + 6$ równa się iloczynowi cyfr liczby 36.

Z liczbą 666 można dokonać znanego figla, mianowicie powiększyć ją o połowę nic do niej nie dodając, tylko obracając ją o 180°, „do góry nogami".



Pary liczb 2 i 2, $1\frac{1}{2}$ i 3 mają tę właściwość, że $2 + 2 = 2 \cdot 2$ i $1\frac{1}{2} + 3 = 1\frac{1}{2} \cdot 3$. Szukajcie innych takich par. Albo zajrzyjcie do drugiego tomu rozrywek: *Śladami Pitagorasa*.



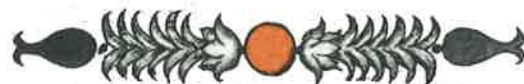
Jak przedziwnie można skrócić ułamki $\frac{26}{65}$ i $\frac{16}{64}$. Można mianowicie skreślić szóstki w licznikach i mianownikach, a wielkość obu ułamków wcale się nie zmieni. Czy istnieją inne takie ułamki? Zapewne! I warto ich poszukać.



Już parę razy poprzednio przytaczaliśmy tabliczki rezultatów mnożeń lub podnoszenia do kwadratu szeregu liczb, w których powtarzały się te same cyfry wstawione w coraz większej ilości pomiędzy dwie cyfry stałe, niezmienne. Podobne zjawisko mamy w następujących kwadratach:

$$4^2 = 16$$
$$34^2 = 1156$$
$$334^2 = 111556$$
$$3334^2 = 11115556$$
$$33334^2 = 1111155556$$

. . . .





Znakomity matematyk J. Tannery podaje sposób względnie szybkiego odszukania, jaka cyfra stoi np. na stutysięcznym miejscu w szeregu liczb napisanych jedna za drugą bez przecinków w naturalnej kolejności:

123456789101112...99100101102...

Wiemy, iż w szeregu takim jest ogółem:

9	liczb 1-cyfrowych . . .	9 cyfr
90	liczb 2-cyfrowych . . .	180 „
900	liczb 3-cyfrowych . . .	2700 „
9000	liczb 4-cyfrowych . . .	36000 „
	Razem	38889 cyfr.

Pięciocyfrowych liczb jest ogółem 90 000, cyfra więc poszukiwana znajdzie się wśród liczb pięciocyfrowych. Do 38 889 cyfr należy jeszcze z liczb pięciocyfrowych dołączyć 100 000 — 38 889, to jest 61 111 cyfr. W tym celu należy pełnych pięciocyfrowych liczb wziąć 61 111 : 5, czyli 12 222, a ponieważ w dzieleniu tym zostaje reszta 1, więc pierwsza cyfra następnej, dwunastotysięcznej dwóchsetnej dwudziestej trzeciej liczby pięciocyfrowej będzie ową poszukiwaną cyfrą stutysięczną. Łatwo obliczyć, że ową liczbą pięciocyfrową będzie liczba 10 000 + 12 222 = 22 222. W liczbie tej pierwszą cyfrą jest 2; ostatecznie więc znaleźliśmy, że stutysięczną cyfrą w podanym szeregu będzie 2.



W pewnym dziele matematycznym zecer zamiast liczby $2^5 \cdot 9^2$ złożył 2592. Korektor błąd tak znaczny przeoczył i książka poszła w świat. Wielu matematyków dzieło to studiowało, wszystkie obliczenia dalsze i poprzednie sprawdzano, a jednak ten prawdziwy „byk" zecersko-korektorski nie został zauważony. Jakim to się mogło stać sposobem?

Stało się tak, a przynajmniej stać się tak mogło dlatego, że $2^5 \cdot 9^2 = 2592$. I jest to bodaj jedyne w tym rodzaju *curiosum* liczbowe.

11. Pewne urozmaicenia w mnożeniu i dzieleniu

Sumowanie długich kolumn liczb, zwłaszcza bez użycia odpowiednich maszyn, jest niewątpliwie jednym z najnudniejszych zajęć pod słońcem. Ale częstokroć mnożenie i dzielenie również dają się człowiekowi dobrze we znaki.

Aby sobie te nieciekawe operacje choć cokolwiek urozmaicić, można w nie wprowadzić pewne bardzo łatwe odmiany.

Tak np. uprzykrzywszy sobie mnożenie można iloczyn dwóch liczb osiągnąć przez dodawanie. Powiedzmy, że chodzi o przemnożenie 43 · 213. Piszemy jedną ze wskazanych tu obok kolumn, których chyba nie potrzeba wyjaśniać, i sumujemy.

213	albo	43
213		43
213		43
213		43
213		43
213		43
213		9159
9159		



Możemy też przeprowadzić mnożenie dla rozmaitości od lewej strony zamiast od prawej. Wówczas zamiast wysuwania każdej następnej liczby iloczynu o jedno miejsce ku lewej stronie cofa się je ku prawej. Poniższy przykład dokładnie rzecz wyjaśnia:

4235	4235
× 3147	× 3147
29645	12705
16940	4235
4235	16940
12705	29645
13327545	13327545

Ciekawą odmianą mnożenia, choć z góry uprzedzić należy — bynajmniej nie przyśpieszającą tego działania, jest następujący sposób:

Przypuśćmy, że mamy do pomnożenia dwie liczby czterocyfrowe, na przykład 1925 przez 2347. Niechaj pierwsza liczba będzie mnożną, a druga mnożnikiem.

Jeśli mnożnik jest liczbą nieparzystą (w naszym przykładzie 2347), to mnożną (1925) podkreślamy. Następnie mnożymy mnożną przez 2, mnożnik zaś równocześnie dzielimy przez 2, przy czym resztę 1 odrzucamy. W naszym przykładzie otrzymujemy w mnożniku znowu liczbę nieparzystą (1173), podkreślamy więc nową mnożną (3850). I tak postępujemy dalej,

podkreślając każdorazowo te mnożne, przy których mnożnik jest liczbą nieparzystą, aż póki w mnożniku nie otrzymamy jedynki. Wówczas wszystkie liczby podkreślone w kolumnie mnożnych dodajemy; suma ich równać się będzie poszukiwanemu iloczynowi.

1925	2347
3850	1173
7700	586
15400	293
30800	146
61600	73
123200	36
246400	18
492800	9
985600	4
1971200	2
3942400	1
4517975	

Jest to średniowieczna metoda mnożenia — *per duplicationem.*



24
1153 : 47
470
684
470
213
47
166
47
119
47
72
47
25

Dzielenie sprowadzić można do odejmowania. Potrzeba na przykład podzielić 1153 przez 47.

Iloraz będzie się składał oczywiście z dwóch cyfr. Cyfra dziesiątek ilorazu wskazywać będzie, ile razy 470 mieści się w dzielnej. Łatwo przekonać się o tym za pomocą odejmowania. Można odjąć 470 od 1153 tylko 2 razy; to znaczy, że cyfra dziesiątek ilorazu będzie 2. Na tej samej zasadzie przekonamy się, że 47 od pozostałych 213 można odjąć 4 razy; taka więc jest liczba jedności ilorazu, reszta zaś z dzielenia jest 25.

12. Mnożenie na palcach

Przy omawianiu dziwów dziewiątki przytoczyliśmy znakomity sposób palcowego mnożenia przez tę liczbę.

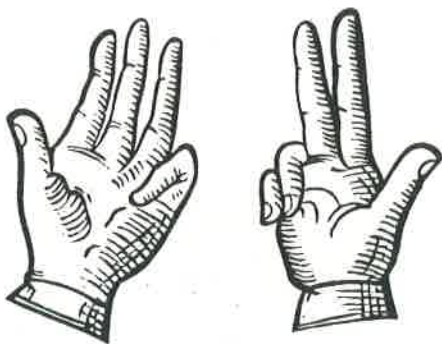
Pewien autor syryjski z XVII w., nazwiskiem Beha-Eddin (1547—1622), w dziełku swym bardzo rozpowszechnionym w Persji i Indiach pod tytułem *Khèlasat as hissàb (O istocie rachunków)* podaje odmienny nieco, ale równie pomysłowy sposób palcowego mnożenia przez inne liczby, niezbędny dla tych, co nie chcą lub nie mogą sięgać w nauce tabliczki mnożenia powyżej 5.

Kto zdobył tajemnicę, ile jest $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3$ i tak dalej aż do $5 \cdot 5$, ten wyżej iść już w tej trudnej nauce nie potrzebuje, wystarczą mu bowiem do bardziej skomplikowanych mnożeń palce.

Przypuśćmy, że trzeba wykonać mnożenie $9 \cdot 8$.

Ale $9 = 5 + 4$, a $8 = 5 + 3$, to znaczy

$$9 \cdot 8 = (5 + 4) \cdot (5 + 3)$$



Należy tedy podnieść 4 palce u jednej ręki i 3 palce u drugiej ręki. Suma palców podniesionych $(4 + 3)$ wskaże liczbę dziesiątek iloczynu (7), a jedności iloczynu osiągniemy mnożąc liczbę zgiętych palców jednej ręki przez liczbę takichże palców drugiej ręki: $1 \cdot 2 = 2$.

A więc ostatecznie $9 \cdot 8 = 72$.

Przy mnożeniu $8 \cdot 7$, co daje $(5 + 3)(5 + 2)$, należy zgiąć u jednej ręki 3 palce, a u drugiej 2 i pozostałe palce wyprostować. Suma zgiętych palców $3 + 2 = 5$ będzie to liczba dziesiątek, a iloczyn wyprostowanych palców $2 \cdot 3 = 6$ będzie to liczba jedności poszukiwanego wyniku. Razem będzie 56. Taki to jest trudny przypadek mnożenia.

A jednak,... jednak chyba lepiej wyuczyć się po prostu tabliczki mnożenia.



13. Niezwykle szybkie podnoszenie do kwadratu

Sposób ten, rzeczywiście doskonały, stosuje się niestety tylko do liczb kończących się piątką. Przepis jest taki: liczbę dziesiątek mnoży się przez najbliższą liczbę wyższą i do iloczynu dopisuje się 25; na przykład:

$$45^2 = 2025, \text{ gdzie } 20 = 4 \cdot 5$$
$$75^2 = 5625, \text{ gdzie } 56 = 7 \cdot 8$$

Objaśnienie tego przepisu jest nietrudne. Każdą liczbę dwucyfrową kończącą się na 5 można przedstawić w postaci $10a + 5$, przy czym a jest liczbą dziesiątek. Teraz obliczamy:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10a + 25 = 100a^2 + 100a + 25,$$

to zaś równa się $100a(a + 1) + 25$, czyli $a(a + 1) \cdot 100 + 25$.

Sposób ten stosować można oczywiście nie tylko do liczb dwucyfrowych; na przykład:

$$105^2 = 11025, \text{ gdzie } 110 = 10 \cdot 11$$
$$135^2 = 18225, \text{ gdzie } 182 = 13 \cdot 14$$

Chociaż przy wielocyfrowej liczbie wypadnie dokonać na papierze mnożenia liczby dziesiątek przez liczbę o 1 wyższą, zawsze jednak osiągnie się pewną oszczędność czasu.

Časopis pro pěstovaní matematiký a fisiký (rocznik 1932) podaje jeszcze dwa prawidła szybkiego podnoszenia do kwadratu:

1° Dla liczb od 51 do 59 obliczamy kwadrat w sposób następujący: do liczby 25 dodajemy cyfrę jedności danej liczby i do wyniku dopisujemy kwadrat cyfry jedności, np. $57^2 = 3249$.

Wzór ogólny:

$$(50 + m)^2 = (25 + m) \cdot 100 + m^2$$

2° Dla liczb od 41 do 49 prawidło podnoszenia do kwadratu jest następujące: do liczby 15 dodajemy cyfrę jedności danej liczby i do wyniku dopisujemy kwadrat dopełnienia jedności do dziesiątki, na przykład $46^2 = 2116$.

Wzór ogólny:

$$(40 + m)^2 = (15 + m) \cdot 100 + (10 - m)^2$$

Zauważmy, że w obu tych przypadkach piszemy:

$$1^2 = 01, \quad 2^2 = 04, \quad 3^2 = 09.$$

14. Potęga w postępie i postęp w potędze

Bardzo liczne są i bardzo ciekawe kombinacje liczbowe z postępami, a zwłaszcza z różnymi potęgami ich wyrazów. I. Ghersi w swej *Matematica dilettevole e curiosa* poświęca im kilkanaście „bitych" stronic. Na razie będziemy tylko posuwali się w granicach postępu arytmetycznego i w zakresie naturalnego ciągu liczb.

Zaczniemy od wskazania bardzo poglądowego graficznego sposobu sumowania jakiegokolwiek postępu arytmetycznego.

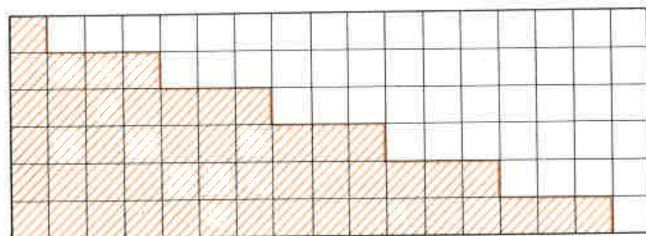
Trzeba na przykład znaleźć sumę wyrazów takiego postępu:

$$1,\quad 4,\quad 7,\quad 10,\quad 13,\quad 16$$

Przede wszystkim odwróćmy dany postęp:

$$16,\quad 13,\quad 10,\quad 7,\quad 4,\quad 1.$$

Układamy w pierwszym szeregu jedną kratkę kreskowaną i 16 białych, w drugim 4 kratki kreskowane i 13 białych itd.



Oczywiste jest, że suma wyrazów równa się liczbie kratek kreskowanych lub kratek białych, to znaczy połowie liczby wszystkich kratek w utworzonym prostokącie; suma ta zaś wynosi $6 \cdot (16 + 1)$, a więc suma wyrazów powyższego postępu równa się

$$\frac{6 \cdot (16 + 1)}{2} = 51.$$



Najłatwiejszy sposób ułożenia tabliczki kwadratów liczb ciągu naturalnego polega na takiej procedurze:

W pierwszej kolumnie piszemy kolejne liczby całkowite zaczynając od 0, a więc: 0, 1, 2, 3, . . .

Dodając te liczby parami: $0 + 1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$ itd., otrzymujemy kolejne liczby nieparzyste, które wypisujemy w drugiej kolumnie, ale o pół odstępu między wierszami obniżone.

W trzeciej kolumnie piszemy u góry 0 i dodajemy do niego najbliższą liczbę z drugiej kolumny, a więc $0 + 1 = 1$; piszemy tę jedynkę w trzeciej kolumnie pod zerem. Do tej liczby 1 dodajemy następną z kolei liczbę z drugiej kolumny, a więc $1 + 3 = 4$; piszemy tę czwórkę w trzeciej kolumnie. Tak postępując dalej: $4 + 5 = 9$, $9 + 7 = 16$, $16 + 9 = 25$, . . ., otrzymywać będziemy kwadraty kolejnych liczb naturalnych.

0		0
	1	
1		1
	3	
2		4
	5	
3		9
	7	
4		16
	9	
5		25
	11	
6		36
	13	
7		49
	15	
8		64
	17	
9		81
.	.	.

Np. $7^2 = 6^2 + (6 + 7)$, $8^2 = 7^2 + (7 + 8)$.

A oto druga wersja tabliczki kwadratów:

Liczby całkowite	Pełne kwadraty	Pierwsze różnice	Drugie różnice
0	0		
		1	
1	1		2
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		2
		9	
5	25		2
		11	
6	36		
7			

„Pierwsze różnice" są to różnice kolejnych kwadratów:

$1 - 0 = 1, \quad 4 - 1 = 3, \quad 9 - 4 = 5, \quad 16 - 9 = 7, \quad \ldots$

„Drugie różnice" są to przyrosty pierwszych różnic:

$3 - 1 = 2, \quad 5 - 3 = 2, \quad 7 - 5 = 2, \quad 9 - 7 = 2, \quad \ldots$

Druga różnica jest stale ta sama: 2, natomiast pierwsze różnice są to kolejne liczby nieparzyste zaczynając od 3; łatwo więc możemy kontynuować słupek pierwszych różnic.

A pełne kwadraty oblicza się w ten sposób, że do ostatniego obliczonego kwadratu dodaje się najbliższą pierwszą różnicę, a więc:

$$2^2 = 1 + 3 = 4$$
$$3^2 = 4 + 5 = 9$$
$$4^2 = 9 + 7 = 16$$
$$5^2 = 16 + 9 = 25$$
$$6^2 = 25 + 11 = 36$$
. . . . . .



Suma pierwszych liczb nieparzystych poczynając od 1 równa się zawsze kwadratowi liczby tych liczb:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$$
. . . .



Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych równa się kwadratowi środkowej liczby pomnożonemu przez 3 i powiększonemu o 8:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 3 \cdot 3^2 + 8$$
$$3^2 + 5^2 + 7^2 = 3 \cdot 5^2 + 8$$
$$5^2 + 7^2 + 9^2 = 3 \cdot 7^2 + 8$$

Każda liczba pierwsza, która przy zmniejszeniu jej o 1 stałaby się podzielna przez 4, to znaczy liczba pierwsza typu $4n + 1$ może być rozłożona na dwa kwadraty liczb całkowitych; na przykład:

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 3^2 + 2^2,$$
$$29 = 5^2 + 2^2,$$
$$41 = 5^2 + 4^2$$

Również kwadrat takiej liczby pierwszej równa się sumie dwu kwadratów:

$$5^2 = 3^2 + 4^2, \quad 13^2 = 12^2 + 5^2,$$
$$29^2 = 21^2 + 20^2,$$
$$41^2 = 40^2 + 9^2$$

A także jej sześcian jest sumą dwu kwadratów:

$$5^3 = 11^2 + 2^2, \quad 13^3 = 46^2 + 9^2,$$
$$29^3 = 142^2 + 65^2,$$
$$41^3 = 236^2 + 115^2$$

Sześciany mogą być przy tym rozbite na kwadraty kilkoma różnymi sposobami; na przykład 5^3 równa się też $10^2 + 5^2$. Nie można natomiast tego powiedzieć o pierwszej i drugiej potędze owych liczb.



Tabliczkę sześcianów liczb ciągu naturalnego tworzy się w nieco bardziej skomplikowany sposób niż tabliczkę kwadratów.

Liczby całkowite	Pełne sześciany	Pierwsze różnice	Drugie różnice	Trzecie różnice
0	0			
		1		
			6	
1	1			
		7		6
			12	
2	8			
		19		6
			18	
3	27			
		37		6
			24	
4	64			
		61		6
			30	
5	125			
		91		
6	216			

„Pierwsze różnice" — to różnice kolejnych sześcianów:

$1-0=1,\quad 8-1=7,\quad 27-8=19,\quad 64-27=37,\ \ldots$

„Drugie różnice" — to przyrosty pierwszych różnic:

$7-1=6,\quad 19-7=12,\quad 37-19=18,\quad 61-37=24,\ \ldots$

Widzimy, że drugie różnice stale wzrastają o 6, a więc trzecie różnice są równe stałej liczbie 6.

Aby utworzyć tabelę sześcianów, wypisujemy dalsze wielokrotności liczby 6 jako „drugie różnice": 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ..., następnie piszemy „pierwsze różnice" zaczynając od 1 i dodając do gotowej liczby następującą po niej drugą różnicę:

$1+6=7,\qquad 7+12=19,\qquad 19+18=37,\qquad 37+24=61,\ \ldots$

i w taki sam sposób tworzymy pełne sześciany:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 1+7 = 8 \\ 3^3 &= 8+19 = 27 \\ 4^3 &= 27+37 = 64 \\ 5^3 &= 64+61 = 125 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$



Wreszcie kilka ciekawych właściwości sześcianów.

1° Sześciany liczb kończących się na 1, 4, 5, 6 i 9 kończą się tymi samymi cyframi; dlatego więc różnice między takimi liczbami i ich sześcianami kończą się zawsze na zero. Sześciany zaś liczb kończących się na 2, 3, 7 i 8 kończą się na 8, 7, 3 i 2; w ten sposób sumy tych liczb z ich sześcianami kończą się również zawsze na zero.

2° Liczba zakończona pewną ilością zer, jeśli liczba zer nie dzieli się przez 3, nie może być pełnym sześcianem.

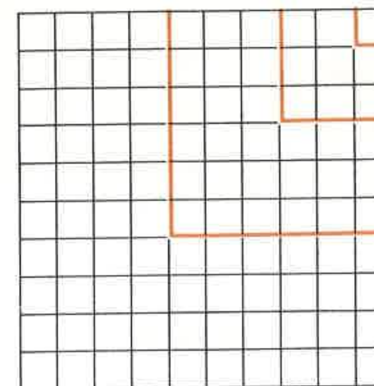
3° Każdy pełny sześcian jest bądź wielokrotnością liczby 9, bądź też wielokrotnością liczby 9 powiększoną lub zmniejszoną o jedność.

4° Ułóżmy tabliczkę nieparzystych liczb naturalnych z takich grup:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^3 \\ 3+5 &= 8 = 2^3 \\ 7+9+11 &= 27 = 3^3 \\ 13+15+17+19 &= 64 = 4^3 \\ 21+23+25+27+29 &= 125 = 5^3 \end{aligned}$$

Suma każdej z tych grup kolejnych równa się, jak widzimy, sześcianowi liczby zawartych w niej liczb.

Sześciany liczb 1, 2, 3, 4 itd. można przedstawić graficznie w takiej postaci, z której jasno wynika bardzo ciekawa ich właściwość, mianowicie ta, że suma sześcianów kolejnych liczb począwszy od 1 równa się kwadratowi ich sumy.



Mamy więc:

$1+2=3$	$1^3+2^3=3^2$
$1+2+3=6$	$1^3+2^3+3^3=6^2$
$1+2+3+4=10$	$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$
$1+2+3+4+5=15$	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2$
. . . .	. . . .



Sumy sześcianów niektórych kolejnych liczb, wziętych nie od 1 począwszy, równają się nie kwadratowi, lecz pełnemu sześcianowi; na przykład:

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$
$$11^3+12^3+13^3+14^3=20^3$$

Istnieją jednak i takie sumy sześcianów kolejnych liczb, wziętych nie od 1 począwszy, które — jak to wykazał słynny matematyk włoski Genocchi — równają się pełnemu kwadratowi; na przykład:

$$289^3+290^3+\ldots+4904^3=(3\cdot 577\cdot 6948)^2$$
$$3600^3+3601^3+\ldots+4225^3=(5\cdot 313\cdot 3925)^2$$



15. Inwersja

Na zakończenie tego działu jeszcze echo z Indii. Inwersja — to jedna z najulubieńszych matematycznych rozrywek Hindusów, zarówno starożytnych, z dawno minionych wieków, jak i nawet współczesnych. I obecnie podobno dzieci hinduskie potrafią nieraz rozwiązywać pamięciowo bardzo skomplikowane zadania ułożone metodą inwersji. Polega ona na tym, że cytuje się szereg działań, które zaczynać należy od ostatniego.

Najdawniejszy ze znanych matematyków hinduskich, Ariabhatta (w V wieku), tak lakonicznie, a jednak ściśle określa inwersję. „Mnożenie staje się dzieleniem, dzielenie przemienia się w mnożenie. Przyrost obraca się w stratę, strata przeistacza się w przyrost: inwersja!!!" Przykład zaczerpnięty z *Lilavati* najlepiej to wyjaśnia:

„O, powiedz, prześliczna dziewczyno z płonącymi oczyma, ty, która tak biegle potrafisz stosować metodę inwersji: jak wielka jest liczba, która będąc pomnożona przez 3, następnie powiększona o $\frac{3}{4}$ tego iloczynu, podzielona przez 7, zmniejszona o $\frac{1}{3}$ ilorazu, pomnożona sama przez siebie, zmniejszona o 52, po wyciągnięciu pierwiastka drugiego stopnia, po dodaniu 8 i podzieleniu przez 10 da w rezultacie 2?"

Rozwiązanie polega na tym, iż idzie się od końca, to jest od 2, i stosuje działania przeciwne wypowiedzianym, mianowicie:

$$(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196, \quad \sqrt{196} = 14, \quad 14 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} : 3 = 28$$

O, Lilavati, ty urocza dziewczyno z płonącymi geniuszem oczyma, musiałaś być istotnie fenomenalnym wśród dziewcząt zjawiskiem, skoro potrafiłaś biegle takie nawet rozwiązywać w myśli zadania!...

III
FIGURY MAGICZNE

UWAGI OGÓLNE

Wśród figur „magicznych" cieszyły się i do dziś cieszą się największą wziętością kwadraty magiczne. Są to kwadraty rozbite na pewną ilość mniejszych kwadracików, czyli pól, w których liczby stanowiące pewien postęp wypisuje się w ten sposób, że suma liczb w każdym poziomym rzędzie i w każdej pionowej kolumnie, i na obu przekątnych jest zawsze jedna i ta sama.

Kwadraty magiczne znane były Chińczykom i Hindusom przed paru tysiącami lat. Spotyka się amulety chińskie z kwadratami magicznymi, na których jeszcze nie ma cyfr, lecz są odpowiednie ilości nakłuć lub wydrążeń. Znane one były również Arabom w IX wieku naszej ery. Do Europy zaś wprowadził je, a przynajmniej pierwsze prawidła ich zestawień wskazał Europejczykom, pewien Grek imieniem Moscopulos, który żył w Konstantynopolu w początkach XV stulecia.



Najbardziej historycznym kwadratem magicznym w Europie nazwać można bez wątpienia ten, który widnieje na jednym z arcydzieł pędzla Dürera zatytułowanym *Melancholia*. Jest to kwadrat złożony z 16 pól, a zestawiony tak pomysłowo, że dwie środkowe liczby dolnego rzędu dają rok powstania dzieła:

1514

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

I wieki późniejsze, i czasy nowożytne nie przestały interesować się figurami magicznymi. Wielcy matematycy, a głównie matematycy francuscy, jak Bachet, Frénicle, Fermat, Poignard, de La Hire, z zapałem opracowują przeróżne metody zestawiania magicznych kwadratów. Ozanam w swych *Récréations* poświęca im cały rozdział XII pierwszej części. B. Violle w roku 1837 wydaje trzytomowe dzieło poświęcone wyłącznie kwadratom magicznym pod tytułem *Traité complet des quarrés magiques*. Wreszcie M. Arnoux w ciekawych studiach ogłoszonych w roku 1894, reasumując cały dorobek swych poprzedników, rzuca wiele nowego i ciekawego światła na to odwieczne zagadnienie.



1. Podział figur magicznych

Figury magiczne dzielą się na płaskie i przestrzenne, są bowiem kwadraty, trójkąty, prostokąty, wielokąty i koła magiczne, ale są również i sześciany magiczne.

Kwadraty dzielą się: zależnie od postępu, w jakim idą liczby — na arytmetyczne i geometryczne; zależnie od podziałek boków — na nieparzyste (3, 5, 7, 9 i tak dalej), nieparzysto-parzyste (6, 10, 14, 18 i tak dalej) i parzysto-parzyste (4, 8, 12, 16 i tak dalej); zależnie wreszcie od ustawienia liczb w kwadracie — na magiczne zwykłe, magiczne o właściwościach szczególnych, hipermagiczne.

2. Właściwości ogólne

I. Kwadrat magiczny pozostanie magicznym, jeśli wszystkie liczby, jakie zawiera, powiększymy lub zmniejszymy o jedną i tę samą liczbę. Pozostanie również magicznym, gdy pomnożymy lub podzielimy wszystkie jego składniki przez jakąś liczbę stałą. Dla jasnego zrozumienia wystarczy przedstawić to na jednym przykładzie:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

19	26	21
24	22	20
23	18	25

38	52	42
48	44	40
46	36	50

W pierwszym kwadracie suma magiczna, czyli suma liczb poszczególnych rzędów, kolumn lub przekątnych, wynosi 15; w drugim kwadracie dodajemy do każdej liczby po 17 i suma magiczna wynosi $15 + 3 \cdot 17 = 66$; wreszcie w trzecim kwadracie mnożymy wszystkie wyrazy przez 2 i suma magiczna wynosi $2 \cdot 66 = 132$.

II. Jeśli kwadrat jest magiczny dla jakiegoś postępu arytmetycznego, to będzie magiczny dla tak samo rozmieszczonego postępu arytmetycznego o innym wyrazie pierwszym i o innej różnicy. Tak np. w pierwszym z podanych kwadratów magicznych zamiast liczb:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

można odpowiednio rozmieścić wyrazy postępu:

91, 96, 101, 106, 111, 116, 121, 126, 131.

Ze wszystkich tych prawideł wyciągnąć można niezmiernie ważną wskazówkę praktyczną, iż formując jakikolwiek kwadrat magiczny wystarczy zestawić go naprzód z liczb najprostszych, więc z liczb naturalnego ciągu: 1, 2, 3, 4, 5, ..., gdyż potem przez mnożenie, dzielenie, powiększanie lub zmniejszanie tych liczb można osiągnąć nieskończoną ilość kwadratów magicznych o najrozmaitszych sumach magicznych.

III. Dalszą niezmiernie ważną właściwością kwadratów magicznych jest to, że z dwu kwadratów możemy otrzymać trzeci przez sumowanie liczb stojących w analogicznych polach:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

+

19	26	21
24	22	20
23	18	25

=

21	35	25
31	27	23
29	19	33

Suma magiczna takiego kwadratu równa się sumie sum magicznych obu składników: $81 = 15 + 66$.

IV. Kwadrat nie utraci swej magiczności, jeśli przestawimy jego kolumny oraz szeregi leżące symetrycznie względem środka kwadratu. Na przykład:

14	7	1	12
9	4	6	15
8	13	11	2
3	10	16	5

12	7	1	14
15	4	6	9
2	13	11	8
5	10	16	3

5	10	16	3
15	4	6	9
2	13	11	8
12	7	1	14

W pierwszym z tych kwadratów przestawiliśmy kolumny pierwszą i czwartą; powstał kwadrat drugi, w którym zachowała się suma wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie, ale nie zachowała się suma na przekątnych. Jeśli teraz w drugim kwadracie przestawimy wiersze pierwszy i czwarty, to otrzymamy kwadrat trzeci, już doskonale magiczny.

V. Suma magiczna każdego kwadratu zestawionego z postępu arytmetycznego równa się połowie sumy pierwszego i ostatniego wyrazu, pomnożonej przez liczbę podziałek boku kwadratu.

Np. suma magiczna najprostszego kwadratu z 9 pól równa się

$$\frac{1+9}{2} \cdot 3 = 15$$

Suma magiczna kwadratu Dürera wynosi

$$\frac{1+16}{2} \cdot 4 = 34$$



3. Budowa nieparzystych kwadratów magicznych

Różnych metod budowy kwadratów magicznych jest bardzo wiele. Wśród nich najwięcej jest przepisów na zestawianie kwadratów nieparzystych, najmniej dla kwadratów nieparzysto-parzystych. Przytoczone poniżej prawidła są względnie najłatwiejsze, a zarazem najciekawsze.

Podajemy ogólne tylko zarysy tych metod, umyślnie ich nie precyzując, aby Czytelnik mógł, samodzielnie je przerabiając według własnej inicjatywy, odnaleźć nowe a interesujące ich odmiany.

I. Metoda hinduska przekazana matematykom europejskim przez wspomnianego wyżej Moscopolusa. Dla przykładu weźmy kwadrat siódmego rzędu, to znaczy 49-polowy. Stawiamy jedynkę w polu znajdującym się bezpośrednio pod polem środkowym i od niej piszemy ku prawej stronie w dół po przekątnej dalsze wyrazy naturalnego ciągu liczb.

22	47	16	41	10	35	4	
5	23	48	17	42	11	29	5
30	6	24	49	18	36	12	30
13	31	7	25	43	19	37	13
38	14	32	1	26	44	20	38
21	39	8	33	2	27	45	21
46	15	40	9	34	3	27	46
22	47	16	41	10	35	4	
						29	

Czwórka wypadnie już poza kwadratem; przenosimy ją w analogiczne pole wewnątrz kwadratu. Piątka znów wyjdzie poza kwadrat; postępujemy z nią tak samo, jak z czwórką. Doszedłszy do 7 napotykamy na drodze pole zajęte już przez jedynkę. W tym przypadku stawiamy 8 pod 7 o dwa pola niżej i kontynuujemy na tych samych zasadach wypisywanie liczb dalszych aż do 49. Otrzymamy w rezultacie kwadrat z sumą magiczną 175.

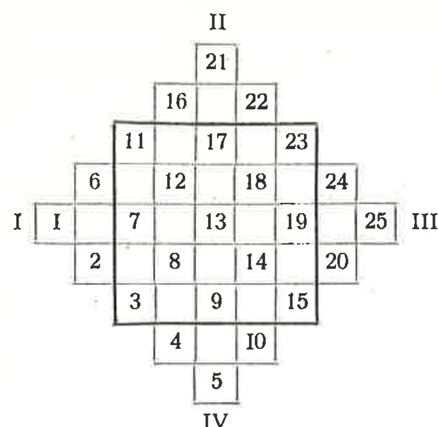
Warto przerobić tę metodę na kwadracie innego rzędu stawiając 1 zamiast pod środkowym polem — nad tym polem i posuwając się w odmiennym kierunku po przekątnych.

II. Metoda syjamska. Podaje ją La Loubère w swym dziele pod tytułem *Du royaume de Siam;* był on posłem Ludwika XIV do króla Syjamu (1687—1688) i tam się z tą metodą zapoznał.

Pierwszy wyraz postępu stawia się w środkowym polu górnego rzędu i wpisuje się dalsze wyrazy w kierunku na prawo ku górze postępując tak, jak w metodzie poprzedniej, z tą tylko różnicą, iż doszedłszy np. siódemką do pola zajętego wpisuje się 8 nie o dwa pola niżej, lecz bezpośrednio pod siódemką.

				2	11	20	
			1	10	19		
		7	9	18			
	6	8	17				
5	14	16					5
13	15					4	13
					3	12	
				2	11		

III. Metoda Bacheta, jedna z najpiękniejszych i najprostszych. Polega ona na dobudowaniu do kwadratu czterech pomocniczych piramidek z wszystkich czterech jego stron, jak to widać na załączonym tu przykładzie kwadratu o 25 polach.



11	4	17	10	23
24	12	5	18	6
7	25	13	1	19
20	8	21	14	2
3	16	9	22	15

Suma magiczna 65

Rozpoczynając następnie z któregokolwiek wierzchołka jednej piramidki i idąc po linii równoległej do przekątnej kwadratu, wpisuje się kolejno wszystkie 25 liczb, po czym liczby będące poza bokami kwadratu przenosi się do jego wnętrza w ten sposób, że piramidkę I wpisuje się dookoła 19, piramidkę II dookoła 9 i tak dalej. Otrzymuje się kwadrat magiczny z sumą 65.

Jest to kwadrat symetryczny. Wzdłuż jednej z przekątnych pięknie układa się postęp: 11, 12, 13, 14, 15 — ze szczęśliwą trzynastką pośrodku, a każda para liczb symetrycznych względem środka daje w sumie 26, czyli 2 · 13.

IV. Metoda La Loubère'a. Pokażemy ją na kwadracie rzędu piątego. Zamiast piramidek dobudowuje się do kwadratu głównego cztery inne kwadraty tejże wielkości, przez co otrzymuje się figurę podaną obok.

							15		
			5			14			
			4	5	13	20			
		3		12	19			10	
	2		11	18	25		9		
1			17	24		8			
		16	23		7				
		22		6					
	21								

W środkowym polu lewej kolumny wpisujemy 1 i idąc na ukos na prawo ku górze wpisujemy liczby 2, 3, 4, 5. Po wpisaniu pierwszej piątki zatrzymujemy się.

Liczby 4 i 5 wyszły poza ramki kwadratu. Gdy każdą z nich przesuniemy o 5 pól w dół, wówczas znajdą się one wewnątrz kwadratu (obacz gotowy kwadrat na następnej figurze).

Pod tym nowym położeniem liczby 5 wpisujemy 6 i znowu idąc na prawo ku górze wpisujemy 7, 8, 9, 10. Po wpisaniu drugiej piątki widzimy, że liczby 7, 8, 9, 10 wyszły poza ramki kwadratu; wprowadzamy je do kwadratu za pomocą przesunięcia o 5 pól w lewo. Pod nowym położeniem liczby 10 wpisujemy 11 i dalej 12, 13, 14, 15.

Aby umieścić w kwadracie liczby 13, 14, 15, trzeba będzie przesunąć je o 5 pól w dół i o 5 pól na lewo. Tak postępujemy do końca.

Gdy dojdziemy do ostatniego wyrazu postępu, czyli, jak w danym razie, do 25, wówczas wszystkie liczby stojące w kwadratach dodatkowych przenosi się na analogiczne pole kwadratu głównego i otrzymuje się kwadrat magiczny odmienny od poprzedniego, otrzymanego metodą Bacheta. Pod polem 25 będzie pole 1.

19	21	3	10	12
25	2	9	11	18
1	8	15	17	24
7	14	16	23	5
13	20	22	4	6

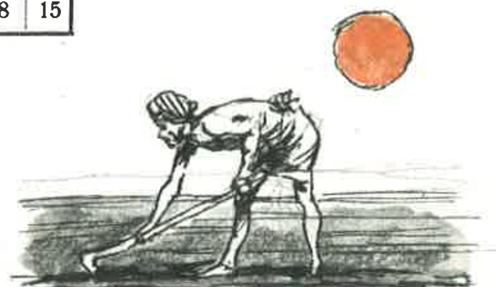
V. Pewna odmiana poprzedniej metody. Natchnieni myślą La Loubère'a podajemy pewną odmianę jego metody dającą symetryczne kwadraty magiczne rzędu piątego. Otóż wypisujemy na papierze kratkowanym ciąg liczb tak rozmieszczony:

1																				
	2																			
		3																		
			4	6																
				5	7															
						8														
							9	11												
								10	12											
										13										
											14	16								
												15	17							
														18						
															19	21				
																20	22			
																		23		
																			24	
																				25

Po wpisaniu wszystkich liczb do kratek wykreślamy grubszymi kreskami taki kwadrat, ażeby na jego przekątnej leżały liczby grupy podstawowej: 11, 12, 13, 14, 15, a następnie — w dostosowaniu do tego kwadratu — kreślimy grubszymi kreskami inne kwadraty rzędu piątego lub ich części.

Teraz już nietrudno będzie przesunąć wszystkie liczby do wnętrza kwadratu głównego i otrzymać poszukiwany kwadrat magiczny. Jest to, jak łatwo stwierdzić, symetryczny kwadrat magiczny.

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15



Kwadraty symetryczne mają ciekawą własność oryginalnego przeistaczania się w kwadraty innego typu. Można mianowicie przesunąć drugi rząd liczb o jedną kratkę na prawo, potem trzeci rząd o dwie kratki na prawo i tak dalej, a następnie cały trójkąt wysuniętych liczb przerzucić do pustych kratek na lewo, jak to wskazuje schemat:

11	18	25	2	9				
10	12	19	21	3				
4	6	13	20	22				
23	5	7	14	16				
17	24	1	8	15				
11	18	25	2	9				
	10	12	19	21	3			
		4	6	13	20	22		
			23	5	7	14	16	
				17	24	1	8	15
11	18	25	2	9				
3	10	12	19	21				
20	22	4	6	13				
7	14	16	23	5				
24	1	8	15	17				

Otrzymaliśmy znowu kwadrat magiczny, ale już niesymetryczny.

VI. Metoda skoków konika szachowego, bardzo oryginalna, a zarazem łatwa i ciekawa. Weźmiemy tym razem dla przykładu znów kwadrat rzędu siódmego, czyli czterdziestodziewięciopolowy. Jedynkę stawiamy w którymkolwiek polu, nad nią zaś 2, 3 i tak dalej wpisujemy w polach, na

					13		
	9			4			
7				12			7
8			3				
			11			6	
		2				14	
		10			5	15	
	1				13		
	9			4			

		18	35	45	13	23	40
	9	26		4	21	31	48
7	17	34	44	12	22	39	7
8	25	42	3	20	30	47	
16	33	43	11	28	38	6	16
24	41	2	19	29	46	14	24
32	49	10	27	37	5	15	32
40	1	18	35	45	13	23	
48	9	26	36	4	21	31	
					22		

które wypadłby skok konika szachowego. Czwórka wyjdzie już poza obręb kwadratu, należy więc ją przenieść na pole analogiczne wewnątrz kwadratu i dalej od niej kontynuować skoki. Gdy dojdziemy do siódemki, a potem do dalszych wielokrotności 7, to znaczy do 14, 21, ..., liczbę następną, tj. 8, 15, 22, ... podpisujemy w polu bezpośrednio niższym i od niej znów skokami konika rozstawiamy dalsze liczby, dopóki nie dojdziemy do 49.

4. Budowa parzysto-parzystych kwadratów magicznych

I. Metoda de La Hire'a. Powyżej przytoczona metoda z pewnymi modyfikacjami daje się zastosować do budowy kwadratów parzysto-parzystych. Pierwszy kwadrat pomocniczy wypełnia się wyrazami postępu 1, 2, 3, 4, ustawionymi w pierwszym wierszu w dowolnym porządku, z tym tylko zastrzeżeniem, żeby w całym kwadracie liczby dopełniające się, więc 1 i 4 oraz 2 i 3 rozmieszczone zostały w polach wzajemnie sobie odpowiadających, to znaczy leżących symetrycznie względem środka kwadratu; otrzymamy kwadrat magiczny z sumą 10.

3	4	1	2
2	1	4	3
2	1	4	3
3	4	1	2

Drugi kwadrat pomocniczy pomieści postęp 0, 4, 8, 12, to znaczy rozpoczynający się od zera i złożony z kolejnych wielokrotności liczby podziałek boku. W pierwszej kolumnie tego kwadratu wpisuje się liczby w porządku dowolnym, w dalszych zaś kolumnach trzymać się należy tego samego, co wyżej, przepisu symetrii liczb. Otrzymujemy drugi kwadrat z sumą 24.

Z dodania liczb stojących w odpowiednich polach tego kwadratu oraz poprzedniego tworzy się kwadrat trzeci z sumą magiczną 34.

12	0	0	12
4	8	8	4
8	4	4	8
0	12	12	0

15	4	1	14
6	9	12	7
10	5	8	11
3	16	13	2

II. Metoda Delanneya i Mondésira. Jest to metoda zupełnie nowoczesna, niezmiernie prosta, a zarazem pomysłowa, można powiedzieć wprost — dowcipna. Przedstawimy ją dla większej jasności na kwadracie ósmego rzędu, to znaczy 64-polowym, ale stosować ją można równie dobrze i do kwadratów 16-polowych. Należy na kwadracie tym przez zabarwienie pewnych pól, jak wskazano na rysunku, utworzyć rodzaj szachownicy.

Uważne rozpatrzenie się w podanym tu przykładzie rzecz dostatecznie wyjaśnia. Otrzymany kwadrat ma sumę magiczną 260.

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

5. Budowa kwadratów nieparzysto-parzystych

Podamy tu względnie najłatwiejszą metodę budowy takich kwadratów Metodę tę podał de La Hire, ale i ona daleka jest od wytworności pomysłu jaka cechuje metody podane uprzednio. Postępując podobnie jak przy kwadratach parzysto-parzystych, budujemy kwadraty pomocnicze: pierwszy z postępu 1, 2, 3, 4, 5, 6, drugi z postępu 0, 6, 12, 18, 24, 30 (u góry str. 163). Oba te kwadraty nie są magiczne, ale ich przekątne dają sumę magiczną. Gdy kwadraty te zsumujemy, również nie otrzymamy jeszcze kwadratu magicznego.

5	6	3	4	1	2
2	1	4	3	6	5
5	6	3	4	1	2
5	6	3	4	1	2
2	1	4	3	6	5
5	6	3	4	1	2

24	6	24	24	6	24
0	30	0	0	30	0
12	18	12	12	18	12
18	12	18	18	12	18
30	0	30	30	0	30
6	24	6	6	24	6

29	12	27	28	7	26
2	31	4	3	36	5
17	24	15	16	19	14
23	18	21	22	13	20
32	1	34	33	6	35
11	30	9	10	25	8

29	7	28	27	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
17	24	21	22	13	14
2	1	34	33	6	35
11	30	10	9	25	8

29	7	28	9	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
14	24	21	22	13	17
2	1	34	33	6	35
11	30	10	27	25	8

Otrzymać go możemy dopiero po serii przestawień, mianowicie: pozostawiając na miejscu liczby idące po przekątnej, przestawiamy w pierwszym od góry rzędzie i w pierwszej z lewa kolumnie odpowiadające sobie wzajemnie miejscami liczby 12 i 7, 27 i 28, 2 i 32, 17 i 23. W drugim i ostatnim rzędzie przestawiamy: 4 i 3, 9 i 10. W drugiej i ostatniej kolumnie: 24 i 18, 14 i 20. Wyniknie z tego czwarty, podany tu kwadrat, w którym przestawić jeszcze należy liczby czwartego rzędu i czwartej kolumny: 17 i 14, 27 i 9. Otrzymamy wówczas kwadrat piąty, który jest wreszcie kwadratem magicznym z sumą magiczną 111.

Przemieszczenia te sprowadzić się dają do trzech reguł ogólnych. Nie ruszając liczb stojących na przekątnych przestawia się kolejno:

1° — w pierwszym rzędzie i w pierwszej kolumnie liczby pól wzajemnie sobie odpowiadających;

2° — w drugim i w ostatnim rzędzie oraz w drugiej i ostatniej kolumnie — liczby pól środkowych;

3° — w jednym z rzędów środkowych i w jednej ze środkowych kolumn — liczby pól skrajnych.

Można oczywiście zamiast pierwszego rzędu i pierwszej kolumny wziąć ostatni rząd i ostatnią kolumnę, można również i przestawienia 2° i 3° modyfikować, byle nie tknąć liczb na polach biegnących po przekątnej.

Budując kwadrat magiczny przy pomocy kwadratów pomocniczych można sobie uplanować, że w pewnym polu znajdzie się pewna liczba, i względnie łatwo to osiągnąć. Na przykład, gdy zechcemy, by w polu środkowym znalazła się jedynka, wówczas od tego pola rozpoczynamy budowę kwadratu pierwszego i wstawiamy tam 1, w drugim zaś kwadracie zabiegamy o to, by w tymże polu wypadło 0.

6. Budowa kwadratów magicznych o właściwościach szczególnych

I. Metoda Arnoux stanowi niejako przejście od zwykłych kwadratów magicznych do kwadratów o właściwościach szczególnych. Jest to bowiem, ściśle mówiąc, przepis na zestawienie kwadratów nieparzystych wyłącznie takich, w których liczba podziałek boku jest wielokrotnością trzech. Ale równocześnie daje ona w rezultacie *kwadrat magiczny przedziałkowy*.

Rzecz wyjaśni się najlepiej na przykładzie, do którego weźmiemy kwadrat rzędu dziewiątego, czyli o 81 polach. Rozbijmy go na dziewięć kwadratów po dziewięć pól i kolejno biorąc po dziewięć wyrazów z postępu 1, 2, 3, 4, 5, . . . , 81, ustawiamy dziewięć kwadratów trzeciego rzędu; następnie rozmieszczamy je według zasady magicznego kwadratu dziewięciopolowego, jak wskazują liczby rzymskie.

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	52	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

Suma magiczna 369

IV	IX	II
III	V	VII
VIII	I	VI

Jeżeli przystąpimy do zestawienia tą metodą kwadratu rzędu piętnastego (15 × 15), to stosować będziemy do rozkładu owych przedziałów dziewięciopolowych jedną z metod wskazanych wyżej dla kwadratów nieparzystych.

Właściwością szczególną kwadratów takich będzie oczywiście to, iż nie tylko w całości są magiczne, ale i kwadraty w każdym poszczególnym przedziale są również magiczne.

Zamiast rozbijania naturalnego ciągu liczb od 1 do 81 na dziewięć kolejnych postępów po dziewięć kolejnych liczb, to znaczy 1, 2, 3, . . . , 9, dalej 10, 11, . . . , 18, dalej 19, 20, . . . , 27 i tak dalej, można z tego naturalnego ciągu 81 liczb uformować 9 postępów innego rodzaju, na przykład:

1, 10, 19, . . . , 73
2, 11, 20, . . . , 74
. . . .
9, 18, 27, . . . , 81

i z tych postępów budować kwadraty dziewięciopolowe, a następnie złożyć z nich kwadrat rzędu dziewiątego. Otrzymamy wówczas również kwadrat przedziałkowy, ale inny niż poprzednio.

II. Parzysto-parzyste kwadraty przedziałkowe buduje się w podobny, lecz nieco odmienny sposób. Dla zestawienia kwadratu przedziałkowego rzędu ósmego dzieli się naturalny ciąg liczb od 1 do 64 na osiem części i z części pierwszej i ósmej, drugiej i siódmej, trzeciej i szóstej, wreszcie czwartej i piątej, inaczej mówiąc: z uzupełniających się części, zestawia się cztery kwadraty rzędu czwartego według jednej z metod podanych uprzednio; każdy z nich będzie miał sumę magiczną 130. Następnie zestawia się z nich kwadrat rzędu ósmego, który jest w ten sposób kwadratem przedziałkowym.

1	63	62	4	9	55	54	12
60	6	7	57	52	14	15	49
8	58	59	5	16	50	51	13
61	3	2	64	53	11	10	56
17	47	46	20	25	39	38	28
44	22	23	41	36	30	31	33
24	42	43	21	32	34	35	29
45	19	18	48	37	27	26	40

I	XV	XIV	IV
XII	VI	VII	IX
VIII	X	XI	V
XIII	III	II	XVI

III. Kwadraty z obramowaniem. Są to kwadraty, które pozostają magiczne, chociaż odejmiemy jedno lub więcej z obramowań składających się z pól biegnących wzdłuż zewnętrznych rzędów i kolumn. Podany tu sposób budowy stosowany być może do wszelkich kwadratów i daje wielką ilość odmian.

Weźmy dla przykładu kwadrat magiczny rzędu szóstego i wytknijmy sobie za cel, by kwadrat miał jedno obramowanie, to znaczy, by kwadrat rzędu czwartego w nim zawarty pozostał magiczny po usunięciu obramowania.

Rozstawimy 36 pierwszych liczb w sposób następujący:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
36 35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 22 21 20 19

Zbudujemy kwadrat rzędu czwartego z ośmiu jakichkolwiek liczb z linii pierwszej i ośmiu uzupełniających liczb z linii drugiej, na przykład:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

oraz

29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.

1	35	34	4
32	6	7	29
8	30	31	5
33	3	2	36

Otrzymamy kwadrat z sumą magiczną 74.

Kwadrat rzędu szóstego, który zamierzyliśmy zbudować, ma sumę magiczną, jak to już wiemy: 111. Stąd wniosek, że do każdej kolumny, do każdego rzędu i do każdej przekątnej powinniśmy dodać po dwie liczby, które w sumie dają 37 = 111 — 74; ale właśnie tę liczbę 37 dają wyżej wypisane liczby pierwszej i drugiej linii, gdy je będziemy parami sumowali. Bierzemy więc stojące jedna pod drugą liczby 9 i 28, 10 i 27 i ustawiamy je w rogach kwadratu (6 × 6) tak, by na przekątnych uzupełniały się wzajemnie do 37. Wiemy teraz, że w pierwszym rzędzie w czterech wolnych polach należy pomieścić liczby, które w sumie dadzą 111 — (9 + 10) = 92, w pierwszej zaś kolumnie suma liczb wstawianych powinna być 111 — (9 + 27) = 75.

Z liczb, które nam pozostały, mianowicie:

11	12	13	14	15	16	17	18
26	25	24	23	22	21	20	19

dla sumy 92 znajdziemy jako składniki na przykład liczby 26, 25, 23, 18. Ustawmy je w dowolnym porządku w pierwszym rzędzie, a w ostatnim rzędzie — ich dopełnienia. Wśród reszty liczb dobieramy dalej cztery składniki dające sumę 75, więc 16, 20, 24, 15 i umieszczamy je w pierwszej kolumnie, ich zaś dopełnienia — w ostatniej. W ten sposób otrzymamy pełny kwadrat magiczny rzędu szóstego z obramowaniem.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Jeszcze łatwiej zbudować można taki kwadrat, gdy do zestawienia kwadratu środkowego weźmiemy nie 8 pierwszych i 8 ostatnich liczb szeregu, lecz liczby środkowe:

11, 12, ..., 18 i 19, ..., 26.

Aby zbudować kwadrat rzędu ósmego, postępujemy zupełnie tak samo: budujemy kwadrat 4 × 4 i otaczamy go obramowaniem; otrzymawszy zaś kwadrat 6 × 6 znów go obramowujemy; dojdziemy wówczas do kwadratu 8 × 8.

Tę samą metodę stosować można do kwadratów nieparzystych. Jeślibyśmy chcieli np. zbudować kwadrat 7 × 7 z obramowaniem, to budujemy naprzód kwadrat 3 × 3, dodajemy doń obramowanie, otrzymamy kwadrat 5 × 5, a dodawszy drugie obramowanie osiągniemy poszukiwany kwadrat czterdziestodziewięciopolowy.

19	44	43	42	41	26	25	20
37	9	53	54	51	18	10	28
36	16	1	63	62	4	49	29
34	48	60	6	7	57	17	31
32	52	8	58	59	5	13	33
30	15	61	3	2	64	50	35
27	55	12	11	14	47	56	38
45	21	22	23	24	39	40	46

40	1	2	3	42	41	46
38	31	13	14	32	35	12
39	30	26	21	28	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	22	29	24	34	44
5	15	37	36	18	19	45
4	49	48	47	8	9	10

IV. Kwadraty z krzyżami. Kwadraty z obramowaniem można łatwo przeistoczyć w kwadraty z krzyżem lub z czterema krzyżami. W tym celu na przykład dla kwadratu 6 × 6 rozbijamy kwadrat środkowy 4 × 4 na cztery kwadraty 2 × 2 i przenosimy je ku czterem rogom; obramowanie dzielimy również na cztery części i zestawiamy pośrodku w formie krzyża uważając, by liczby stojące w końcach przekątnej pozostały na przekątnych; otrzymamy wówczas kwadrat magiczny z krzyżem.

Jeśli zaś rozbijemy ten sam podany kwadrat na 9 części i zestawimy je, jak wskazuje rysunek, to otrzymamy kwadrat z czterema krzyżami. Osobliwość takich kwadratów polega na tym, że części wyodrębnione linią grubszą dają oddzielnie od całości pewną sumę magiczną, mianowicie krzyże dają sumę magiczną 111, a figury, które pozostaną po wyjęciu pojedynczego lub poczwórnego krzyża, dają się zestawić w kwadrat z sumą magiczną 74.

1	35	16	21	34	4
32	6	20	17	7	29
25	26	9	10	23	18
12	11	27	28	14	19
8	30	24	13	31	5
33	3	15	22	2	36

		16	21		
		20	17		
25	26	9	10	23	18
12	11	27	28	14	19
		24	13		
		15	22		

1	35			34	4
32	6			7	29
8	30			31	5
33	3			2	36

1	16	35	34	21	4
25	9	26	23	10	18
32	20	6	7	17	29
8	24	30	31	13	5
12	27	11	14	28	19
33	15	3	2	22	36

	16			21	
25	9	26	23	10	18
	20			17	
	24			13	
12	27	11	14	28	19
	15			22	

1		35	34		4
32		6	7		29
8		30	31		5
33		3	2		36

7. Kwadraty magiczne o postępach geometrycznych

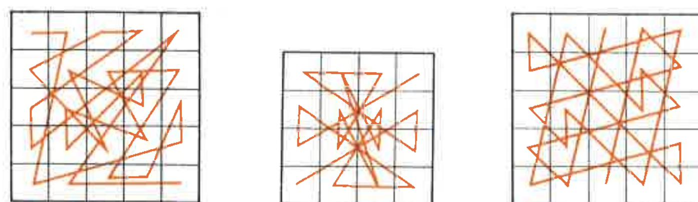
Zasady ogólne budowy kwadratów z postępów nie arytmetycznych, lecz geometrycznych są identyczne z poprzednimi. Oczywiście zamiast ciągu liczb 1, 2, 3, 4, ... należy posiłkować się ciągiem wykładników 0, 1 2, 3, 4, ... i zamiast sumy magicznej trzeba mieć na uwadze iloczyn magiczny

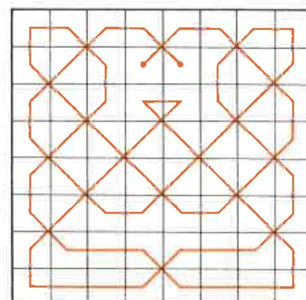
2	256	8
64	16	4
32	1	128

Iloczvn magiczny 4096

8. Diagramy geometryczne kwadratów magicznych

Budowę każdego kwadratu magicznego zobrazować można za pomocą diagramów przedstawiających kolejne rozmieszczenie liczb po polach, przy czym niejednokrotnie wiążą się te linie w bardzo interesujące figury. Na rysunkach podajemy diagramy kwadratu 4 × 4, dwóch różnymi metodami zestawionych kwadratów 5 × 5 i niepospolicie symetryczny diagram kwadratu 8 × 8. Budowę ostatniego kwadratu warto rozpatrzyć szczegółowo, podstawiwszy liczby od 1 do 64 w dowolnym kierunku od punktów wyjścia na prawo lub na lewo.





9. Linie arytmetyczne

Zanim przystąpimy do omówienia kwadratów hipermagicznych, musimy podać nieco wiadomości o *liniach arytmetycznych.*

Przypatrzmy się uważnie poniższej tabelce; składa się ona z 9 kwadratów dwudziestopięciopolowych, w które wpisane są kolejno liczby od 0 do 24.

Zamiast 9 kwadratów można by wziąć 16, 25, ... kwadratów, można by również wziąć kwadraty nie 25-polowe, lecz z inną liczbą pól, bo chodzi tu właściwie nie o ich ilość ani jakość, lecz o wytworzenie pewnego tła z ciągu liczbowego ułożonego w kwadraty, na którym to tle narysować będziemy mogli tak zwane linie arytmetyczne i wyjaśnić ich znaczenie.

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24

Bez użycia linijki i ołówka można dojrzeć od razu jedną z linij arytmetycznych, mianowicie przekątną biegnącą na przykład od pola zajętego przez 0 poprzez pole 6, dalej 12, 18, 24, ...

Zauważymy tu zaraz pewną szczególną właściwość tej linii.

Szereg liczb, przez które biegnie linia arytmetyczna

$$0, \quad 6, \quad 12, \quad 18, \quad 24, \ \ldots$$

można przedstawić w takiej postaci:

$$0, \quad 1+5, \quad 2+2\cdot 5, \quad 3+3\cdot 5, \quad 4+4\cdot 5, \ \ldots$$

Jeśli więc pole wyjścia linii oznaczamy przez 0, to zawartość pierwszego przeciętego przez nią pola będzie 1 + wielokrotność 5, drugiego: 2 + wielokrotność 5, trzeciego: 3 + wielokrotność 5, czwartego: 4 + wielokrotność 5 i tak dalej.

Jeśli zamiast przeprowadzić w wyobraźni przekątną kwadratu, weźmiemy linijkę i ołówek i połączymy na przykład środek pola zajętego przez 0 ze środkiem pola zajętego w tymże kwadracie przez 16, to przekonamy się, że prosta, którą wykreślimy i przedłużymy dalej, przejdzie przez sam środek wielu innych pól i utworzy się znów pewien ciąg liczb:

$$0,\quad 16,\quad 7,\quad 23,\quad 14,\quad \ldots,$$

który również napisać można tak:

$$0,\quad 1 + 3 \cdot 5,\quad 2 + 1 \cdot 5,\quad 3 + 4 \cdot 5,\quad 4 + 2 \cdot 5,\quad \ldots$$

Ponownie otrzymujemy więc to samo, co poprzednio, mianowicie: ciąg liczb wpisanych w pola, przez środki których biegnie owa linia arytmetyczna, składa się jakby z numerów porządkowych pól: 0, 1, 2, 3, 4, ... plus pewne wielokrotności 5.

Takie to więc linie proste przechodzące przez środki szeregu pól nazywamy liniami arytmetycznymi. Przy figurach magicznych rozpatrywanych poprzednio mieliśmy do czynienia stale (bez użycia tej nazwy) z trzema rodzajami linij arytmetycznych, które w kwadratach magicznych były też liniami magicznymi, mianowicie z liniami poziomymi rzędów pól, liniami pionowymi kolumn i przekątnymi.

Obecnie więc rozszerzyliśmy tylko nasze zainteresowanie na inne linie ukośne, jakie wśród pól kwadratu można przeprowadzić, i nazwaliśmy wszystkie te linie mianem linij arytmetycznych.

	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
2	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	15	16	17	18	19
4	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
0	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
2	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	15	16	17	18	19
4	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24

Przyjrzyjmy się uważnie zamieszczonemu obok rysunkowi, na którym graficznie przeprowadzonych zostało kilka arytmetycznych linij. Odległość między sąsiednimi środkami pól leżących na linii arytmetycznej nazywa się *krokiem* linii arytmetycznej.

Jeśli po brzegach prostokąta ponumerujemy rzędy pól i kolumny (jak to widzimy na rysunku), to każde pole mozna oznaczyć numerami jako skrzyżowanie odpowiedniej kolumny i rzędu, stawiając zawsze na pierwszym miejscu numer kolumny, na drugim — numer rzędu. Na przykład na polu (2,3) znajduje się liczba 17, a na polu (3,2) — liczba 13.

Aby oznaczyć krok linii, wystarczy wypisać dwa najbliższe sobie pola, przez środki których biegnie linia, więc na przykład (2,0) i (3,3).

Na podstawie tej numeracji możemy nie patrząc wcale na rysunek wypisać dalszy szereg pól, przez środki których przejdzie linia tym krokiem idąca. Wystarczy do numeru kolumny (tj. liczby stojącej w nawiasie na miejscu pierwszym) dodawać stale po $1 = (3 - 2)$, a do numeru rzędu dodawać wciąż po $3 = (3 - 0)$; otrzymamy wówczas pola takie:

$$(2,0),\quad (3,3),\quad (4,6),\quad (5,9),\quad (6,12),\quad (7,15),\quad \ldots$$

Części linii wychodzące poza ramy pierwszego kwadratu możemy zawsze sprowadzić do kroków analogicznych w tymże kwadracie. Na przykład nakreślmy linię (0,0) — (1,2); przejdzie ona dalej przez pola (2,4), (3,6), (4,8) i tak dalej. Otóż odcinek tej linii, mianowicie jej krok (3,6) — (4,8), sprowadzić można do kroku (3,1) — (4,3).

Jeśli punktem wyjścia linii jest środek pola (0,0), to chcąc określić czwarte pole przy kroku (1,3), wystarczy wziąć pole o numerach $4 \cdot 1$ i $4 \cdot 3$, co w skróceniu oznaczyć można: $4 \cdot (1,3)$, a więc przy tych warunkach zamiast ciągu (0,0), (1,3), (2,6), (3,9), (4,12), (5,15), ..., można wypisać ciąg taki:

$$(0,0),\quad (1,3),\quad 2 \cdot (1,3),\quad 3 \cdot (1,3),\quad 4 \cdot (1,3),\quad 5 \cdot (1,3),\quad \ldots$$

Wśród wielkiej ilości linij arytmetycznych, które można przeprowadzić z rozmaitych pól we wszystkich kierunkach, wyróżniamy tak zwane *główne linie arytmetyczne*, oznaczone na poniższym rysunku. Wychodzą one wszystkie z pola (0,0), a kroki ich są następujące:

krok (1,0) czyli *OA*
,, (1,1) ,, *OB*
,, (1,2) ,, *OC*
,, (1,3) ,, *OD*
,, (1,4) ,, *OE*
oraz krok (0,1) ,, *OF*

	0	1	2	3	4
0	O	A			
1	F	B			
2		C			
3		D			
4		E			

Ilość linij głównych dla kwadratu 25-polowego wynosić będzie 6, to znaczy $5 + 1$, a w ogóle: $n + 1$, jeśli n jest liczbą pól w rzędzie lub kolumnie kwadratu.

Główne linie arytmetyczne przejdą przez następujące pola (po sprowadzeniu ich dalszych odcinków w drugim kwadracie do analogicznych kroków w głównym kwadracie):

Linia *OA*: (0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0)
,, *OB*: (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)
,, *OC*: (0,0), (1,2), (2,4), (3,1), (4,3)
,, *OD*: (0,0), (1,3), (2,1), (3,4), (4,2)
,, *OE*: (0,0), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
,, *OF*: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4)

	0	1	2	3	4
0	O	A	A	A	A
1	F	B	D	C	E
2	F	C	B	E	D
3	F	D	E	B	C
4	F	E	C	D	B
0					
1			D	C	E
2				E	D
3			E		C
4				D	

Z zestawienia tego widzimy, iż każde pole głównego kwadratu będzie stanowiło punkt krańcowy kroków pewnej linii głównej, przy czym tylko pole (0,0) będzie wspólne wszystkim liniom, w żadnym natomiast innym polu linie główne się nie spotykają.

10. Kwadraty hipermagiczne

Są to kwadraty niezmiernie oryginalne. Zajmował się ich teorią matematyk francuski Arnoux w końcu ubiegłego wieku.

Rozważając kwadraty, których liczba pól w rzędzie jest liczbą pierwszą, doszedł Arnoux do zdumiewającego na pozór wniosku, że kwadrat, którego pola zapełnione są liczbami ciągu naturalnego, ma tę własność, iż wszystkie jego główne linie arytmetyczne, z wyjątkiem dwóch, są liniami magicznymi.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Ale wyjątki owe są to linie poziome i pionowe, czyli rzędy pól i kolumny, które we wszystkich zwykłych i niezupełnie zwykłych kwadratach magicznych są właśnie — obok przekątnych — liniami magicznymi.

Weźmiemy dla przykładu kwadrat dwudziestopięciopolowy. Suma magiczna kwadratu zestawionego z postępu arytmetycznego równa się — jak wiadomo — połowie sumy pierwszego i ostatniego wyrazu pomnożonej przez liczbę podziałek boku kwadratu, czyli

$$\frac{0+24}{2}\cdot 5 = \frac{5^2-1}{2}\cdot 5 = \frac{(5-1)\cdot 5\cdot(5+1)}{2} = 60.$$

Przyjrzyjmy się którejkolwiek z głównych linij arytmetycznych tego kwadratu, na przykład (1,3); przechodzi ona przez następujące pola: (0,0), (1,3), (2,1), (3,4), (4,2), gdzie — jak widzimy — i rzędy, i kolumny noszą numery: 1, 2, 3, 4, w różnym tylko porządku. Pola te zawierają następujące wyrazy ciągu:

$$0,\quad 1+3\cdot 5,\quad 2+1\cdot 5,\quad 3+4\cdot 5,\quad 4+2\cdot 5,$$

których suma wynosi

$$1+2+3+4+(1+2+3+4)\cdot 5 =$$

$$= (1+2+3+4)\cdot(5+1) = \frac{(5-1)\cdot 5\cdot(5+1)}{2},$$

to znaczy ściśle równa się wyżej ustalonej sumie magicznej.

Ten sam rezultat otrzymamy rozpatrując trzy inne ukośne główne linie arytmetyczne: (1,1), (1,2), (1,4); nie będą natomiast magiczne dwie pozostałe linie, mianowicie: pozioma (1,0) i pionowa (0,1). (Ale i tu zachodzi ciekawy objaw: spośród pięciu rzędów tylko cztery są niemagiczne i tylko cztery kolumny z pięciu kolumn stanowią wyjątek z magiczności; natomiast środkowy rząd i środkowa kolumna są magiczne, można więc je uznać za wyjątki w wyjątkach!).

Jeśli rozpatrywać będziemy linie arytmetyczne kwadratu wychodzące nie z pola (0,0), lecz z jakiegokolwiek innego, przekonamy się, że i tym razem wszelkie ukośne główne linie arytmetyczne podlegają prawom magiczności.

Weźmy linię wychodzącą z pola (4,2) analogiczną do linii (1,2); przetnie ona następujące pola:

$$(4,2),\quad (0,4),\quad (1,1),\quad (2,3),\quad (3,0).$$

Widzimy, że zarówno w numerach kolumn, jak i rzędów powtarzają się te same cyfry, co poprzednio: 0, 1, 2, 3, 4; stąd więc wniosek ten sam, co wyżej...

Ale co będzie, gdy za punkt wyjścia obierzemy pole (2,2)? Które główne linie arytmetyczne będą wówczas magicznymi, a które stanowić będą wyjątek?

Gdy wyobrazimy sobie kwadrat uwielokrotniony we wszystkich kierunkach, wówczas wszystkie główne linie arytmetyczne przecinające to istne morze liczb będą magiczne, z wyjątkiem poziomych i pionowych, a wśród nich znów z wyjątkiem linii biegnących przez pola, w których wpisana jest liczba 12.

Na takim kobiercu kratkowo-liczbowym prowadzimy dwie symetryczne linie arytmetyczne, na przykład (2,1) i (1,2); następnie z pierwszych czterech pól, przez które linie te przejdą odpowiednim krokiem, wysnujemy analogiczne linie arytmetyczne; otrzymamy wówczas równoległobok albo romb, mieszczący wszystkie liczby od 0 do 24 i mający właściwości zwykłego kwadratu magicznego, to znaczy, że wszystkie rzędy i wszystkie kolumny oraz obie przekątne dają sumę magiczną (60), ale — co najciekawsze — ów równoległobok albo romb ma właściwości kwadratu hipermagicznego.

Te jednak właściwości występują z pewnym znamiennym ograniczeniem: nie będą magiczne w tym nowym kwadracie linie (1,2) i (1,3). Dlaczego? Niechaj Czytelnik sam znajdzie na to odpowiedź. Natomiast magiczna będzie linia (1,4), no i oczywiście (1,0), (1,1), (0,1).

Przy kwadratach dziewięciopolowych ($n = 3$) tylko cztery linie (tzn. $n + 1$) będą głównymi liniami arytmetycznymi, a z tych magiczne będą tylko dwie.

W miejsce ciągu liczb 0, 1, 2, . . ., 24 możemy jako składniki kwadratu hipermagicznego wziąć (jak to robiliśmy przy zwykłych kwadratach) liczby: 1, 2, 3, . . ., 25. Aby to osiągnąć, wystarczy powiększyć o 1 wszystkie liczby wypisane w ostatnim kwadracie: żadna jego właściwość nie ulegnie przy tym zmianie.

Zamiast wyjść przy formowaniu tego kwadratu z pola (0,0), moglibyśmy obrać równie dobrze jakieś inne pole; zamiast linii (2,1), która nie jest główną linią arytmetyczną, można by obrać linię (1,3) i wprowadzać tym podobne urozmaicenia. Stąd z góry już da się przewidzieć, że liczba kwadratów hipermagicznych, które tym sposobem można zbudować, jest wielka.

Jeśli poprzestaniemy wyłącznie na głównych liniach arytmetycznych w kwadracie dwudziestopięciopolowym, to po dość kombinacyjnych obliczeniach dojdziemy do liczby 6000 różnych kwadratów, które zbudować można z tego samego ciągu liczb.

A wszak dodać tu należy, że dla liczby rzędów i kolumn można wziąć (zamiast 5) inną liczbę pierwszą i w ten sam sposób można budować kwadraty hipermagiczne w tysiącach odmian.

11. Kwadrat z magicznych najmagiczniejszy

Tyle mówiliśmy o różnych kwadratach magicznych, hipermagicznych, i zdawałoby się, że w tej dziedzinie nic już nas zadziwić ani... przerazić nie zdoła. A jednak spójrzcie tylko na zamieszczony tu kwadrat magiczny.

621

29	17	61	72
71	62	19	27
12	21	77	69
67	79	22	11

179

Czy widzieliście coś podobnego? Można czytać go „głową do góry" i „do góry nogami", a zawsze będzie jednakowo magiczny.

12. Wiązki magiczne

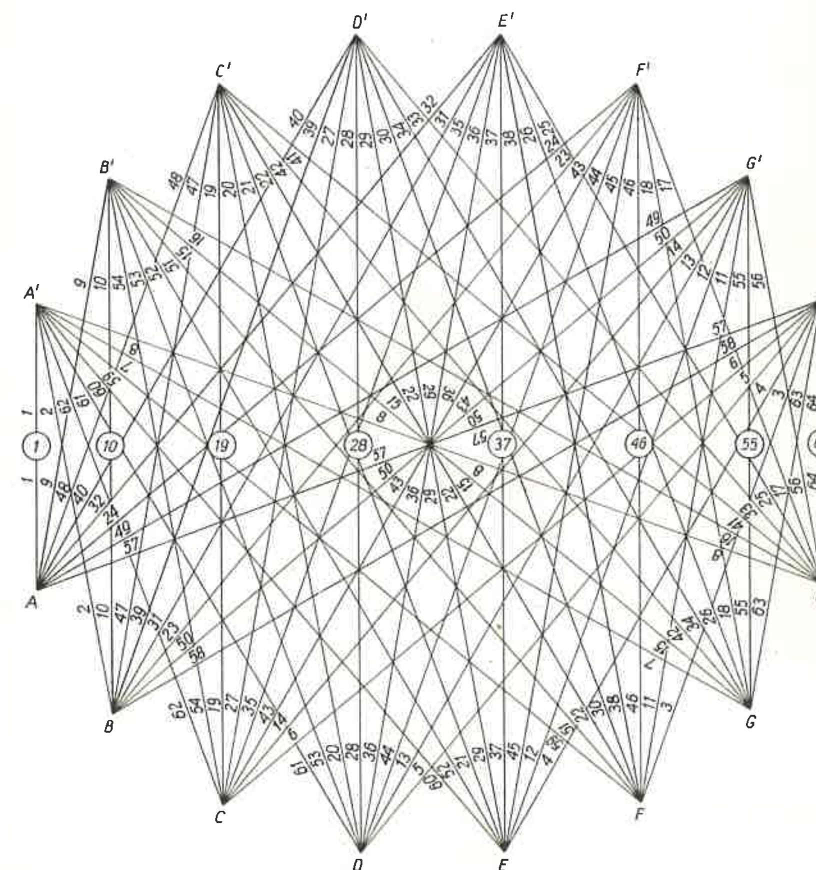
Jeśli ilość pól w kolumnie lub w rzędzie kwadratu oznaczymy przez n, to możemy powiedzieć, iż w każdym pełnomagicznym kwadracie mamy $(2n + 2)$ linij pól o jednakowej zawsze sumie magicznej. Na takie więc linie magiczne możemy podzielić kwadrat i układać z nich najrozmaitsze figury.

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

Podamy tu ciekawy i ładny sposób przeistoczenia kwadratu 64-polowego w tak zwane *wiązki magiczne*.

Dla kwadratu tego $n = 8$, więc $2n + 2 = 18$; istotnie podzielić go można na 18 linij: 8 kolumn, 8 rzędów i 2 przekątne.

Na okręgu koła o środku O wyznaczamy 8 punktów: A, B, C, D, E, F, G, H oraz 8 diametralnie przeciwległych punktów $A', B', C', D', E', F', G', H'$.



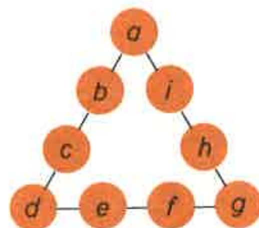
Obie serie tych punktów łączymy liniami prostymi: otrzymamy wówczas osiem wiązek wychodzących z punktów $A, \ldots, H$ i tyleż wiązek wychodzących z punktów $A', \ldots, H'$. Na promieniach wychodzących z punktu A wpiszemy kolejno, od lewej ręki do prawej, liczby: 1, 9, 48, 40, ..., 57; na promieniach wychodzących z punktu B wpiszemy liczby: 2, 10, 47, ..., 58 i tak dalej. Wówczas w punkcie A' zbiegną się promienie z liczbami: 1, 2, 62, 61, 60, 59, 7, 8; w punkcie B' — promienie z liczbami: 9, 10, 54, 53, 52, 51, 15, 16; i tak dalej.

Otrzymamy więc szesnaście wiązek promieni, z których osiem, mianowicie $A, B, \ldots, H$, odpowiadać będzie kolumnom kwadratu, pozostałe osiem to jest $A', B', \ldots, H'$, odpowiedzą rzędom. Nie koniec na tym! Na średnicy koła znajdą się liczby: 1, 10, 19, 28, 37, ..., 64, czyli liczby biegnące po pierwszej przekątnej, a w punkcie O zbiegną się promienie z liczbami drugiej przekątnej, mianowicie: 57, 50, 43, 36, ..., 8.

Na mocy tego jednego przykładu łatwo sobie przedstawić, jaką wspaniałą rozmaitość kombinacji może dać zastosowanie grafionu, ekierki, a poniekąd i cyrkla do przeobrażania kwadratów magicznych w różne wiązki i gwiazdy.

13. Trójkąty o magicznym obwodzie

Trójkąt magiczny jest to jedna z najciekawszych figur magicznych. Liczby naturalne od 1 do 9 należy ustawić w miejsce podanych tu liter tak,



żeby suma kwadratów liczb stojących wzdłuż każdego boku trójkąta była zawsze ta sama, to znaczy żeby

$$(1)\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = Q,$$
$$(2)\ d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = Q,$$
$$(3)\ g^2 + h^2 + i^2 + a^2 = Q.$$

Sumując te trzy równania otrzymujemy:

$$a^2 + d^2 + g^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2) = 3Q$$

Suma zawarta w nawiasie jest to suma kwadratów liczb naturalnych od 1 do 9. Jak wiadomo, suma kwadratów

$$S^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

wyraża się wzorem

$$S^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

co przy $n = 9$ daje $S^{(2)} = 285$. Stąd

$$a^2 + d^2 + g^2 + 285 = 3Q,$$

a więc

$$(4)\quad a^2 + d^2 + g^2 = 3(Q - 95).$$

Zauważmy, że jeżeli liczba całkowita nie jest podzielna przez 3, to jej kwadrat ma postać $3k + 1$. Skoro suma kwadratów liczb a, d, g jest podzielna przez 3, to jedno z dwojga:

I. albo każda z tych liczb a, d, g jest podzielna przez 3 (a więc są to liczby 3, 6, 9),

II. albo każda jest niepodzielna przez 3.

W przypadku I można (nie ograniczając przez to ogólności rozważań) przyjąć $a = 3$, $d = 6$, $g = 9$. Ponieważ $a^2 + d^2 + g^2 = 126$, więc wzór (4) daje $126 = 3(Q - 95)$, skąd $Q = 137$. Wtedy na podstawie (1) mamy $b^2 + c^2 = 92$.

Skoro suma $b^2 + c^2$ jest liczbą parzystą, to b i c muszą być równocześnie parzyste albo nieparzyste: kombinując jednak na wszelkie sposoby kwadraty liczb 2, 4, 8 albo kwadraty liczb 1, 5, 7 nie będziemy mogli osiągnąć takiej kombinacji, żeby suma owych dwu kwadratów $b^2 + c^2$ równała się 92. A więc hipoteza I upada.

W przypadku II przeprowadzamy następujące rozważania. Ze wzorów (1), (2), (3) wynika, że

$$(a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) = (d^2 + g^2) + (e^2 + f^2) = (g^2 + a^2) + (h^2 + i^2).$$

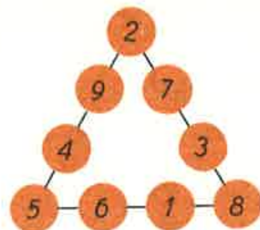
Ale w tym przypadku każda z sum $a^2 + d^2$, $d^2 + g^2$, $g^2 + a^2$ daje w dzieleniu przez 3 tę samą resztę, mianowicie 2. Stąd wniosek, że sumy $b^2 + c^2$, $e^2 + f^2$, $h^2 + i^2$ dają również jednakowe reszty. Nietrudno zauważyć, że w skład każdej sumy wchodzi jeden kwadrat podzielny przez 3 i jeden niepodzielny. Nie ograniczając ogólności rozważań możemy przyjąć $b = 9^2 = 81$, $e = 6^2 = 36$, $h = 3^2 = 9$.

Porównując wzór 1 ze wzorem 2 i 3 otrzymujemy

$$(5)\quad a^2 + c^2 + 45 = f^2 + g^2$$
$$(6)\quad c^2 + d^2 + 72 = g^2 + i^2,$$

gdzie kwadratami są liczby 1, 4, 16, 25, 49, 64.

Wzór (6) może być spełniony tylko w przypadkach, gdy $g^2 + i^2 = 64 + 49 = 113$ i $c^2 + d^2 = 41 = 16 + 25$, albo gdy $g^2 + i^2 = 64 + 25 = 89$ i $c^2 + d^2 = 17 = 1 + 16$. Po próbach, które tu pomijamy, dochodzimy do wniosku, że równania (5) i (6) mogą być tylko wtedy spełnione, gdy weźmiemy $g^2 = 64$, $c^2 = 16$, $a^2 = 4$, $f^2 = 1$, $d^2 = 25$, $i^2 = 49$; trójkąt więc



przedstawi się w takiej postaci, jak na podanym rysunku. I tu od razu spostrzegamy jego niespodzianą nową właściwość, mianowicie tę, że nie tylko suma kwadratów liczb stojących przy poszczególnych bokach, ale i suma samych tych liczb jest również stała:

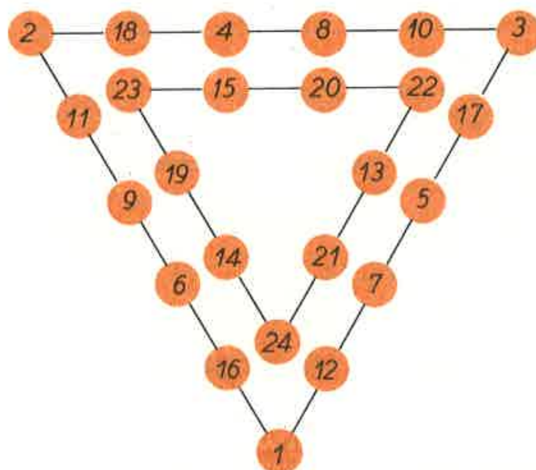
$$2 + 9 + 4 + 5 = 20, \quad 5 + 6 + 1 + 8 = 20$$
$$8 + 3 + 7 + 2 = 20.$$

Trójkąt jest więc podwójnie magiczny, z sumami magicznymi 20 i 126.

14. Inne trójkąty magiczne

Dla trójkątów magicznych, które poniżej przytaczamy, nie ma właściwie metody zestawiania, niemniej jednak przedstawiają one typy figur bardzo ciekawych, a różne odmiany drugiego zwłaszcza rodzaju pobudzają do prób samodzielnych, niejednokrotnie uwieńczonych interesującymi wynikami.

I. Trójkąty koncentryczne



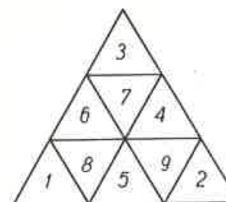
Wszystkie boki zewnętrznego trójkąta dają sumę magiczną 45

$$1 + 12 + 7 + 5 + 17 + 3 = 45$$
$$3 + 10 + 8 + 4 + 18 + 2 = 45$$
$$2 + 11 + 9 + 6 + 16 + 1 = 45$$

Suma magiczna boków wewnętrznego trójkąta wynosi 80

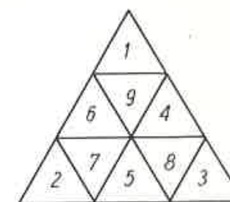
$$24 + 21 + 13 + 22 = 80$$
$$22 + 20 + 15 + 23 = 80$$
$$23 + 19 + 14 + 24 = 80$$

II. Trójkąty zestawione z trójkątów



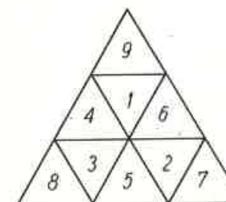
$$1 + 5 + 6 + 8 = 20$$
$$2 + 4 + 5 + 9 = 20$$
$$3 + 6 + 4 + 7 = 20$$

$$1 + 8 + 5 + 9 + 2 = 25$$
$$2 + 9 + 4 + 7 + 3 = 25$$
$$3 + 7 + 6 + 8 + 1 = 25$$



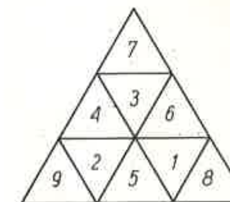
$$2 + 5 + 6 + 7 = 20$$
$$3 + 4 + 5 + 8 = 20$$
$$1 + 6 + 4 + 9 = 20$$

$$2 + 7 + 5 + 8 + 3 = 25$$
$$3 + 8 + 4 + 9 + 1 = 25$$
$$1 + 9 + 6 + 7 + 2 = 25$$



$$8 + 5 + 4 + 3 = 20$$
$$7 + 6 + 5 + 2 = 20$$
$$9 + 4 + 6 + 1 = 20$$

$$8 + 3 + 5 + 2 + 7 = 25$$
$$7 + 2 + 6 + 1 + 9 = 25$$
$$9 + 1 + 4 + 3 + 8 = 25$$

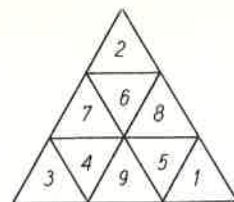


$$9 + 5 + 4 + 2 = 20$$
$$8 + 6 + 5 + 1 = 20$$
$$7 + 4 + 6 + 3 = 20$$

$$9 + 2 + 4 + 3 + 7 = 25$$
$$7 + 3 + 6 + 1 + 8 = 25$$
$$8 + 1 + 5 + 2 + 9 = 25$$

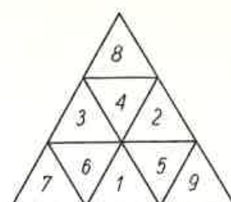
12*

Podane trójkąty pomimo przestawienia liczb dają sumy magiczne te same. Ale można też, jak wykazują przykłady poniższe, przez inne przestawienie tychże dziewięciu liczb otrzymać trójkąty tego samego typu, z odmiennymi jednak sumami magicznymi.



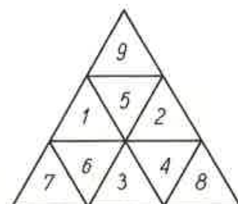
3 + 9 + 7 + 4 = 23
1 + 8 + 9 + 5 = 23
2 + 7 + 8 + 6 = 23

3 + 4 + 9 + 5 + 1 = 22
1 + 5 + 8 + 6 + 2 = 22
2 + 6 + 7 + 4 + 3 = 22



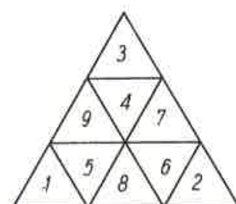
7 + 1 + 3 + 6 = 17
9 + 2 + 1 + 5 = 17
8 + 3 + 2 + 4 = 17

7 + 6 + 1 + 5 + 9 = 28
9 + 5 + 2 + 4 + 8 = 28
8 + 4 + 3 + 6 + 7 = 28



7 + 1 + 3 + 6 = 17
9 + 2 + 1 + 5 = 17
8 + 3 + 2 + 4 = 17

7 + 6 + 1 + 5 + 9 = 28
9 + 5 + 2 + 4 + 8 = 28
8 + 4 + 3 + 6 + 7 = 28

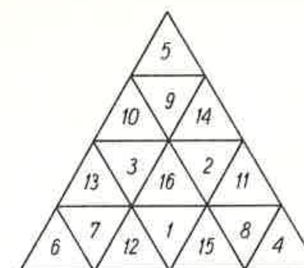


1 + 9 + 8 + 5 = 23
3 + 7 + 9 + 4 = 23
2 + 8 + 7 + 6 = 23

1 + 5 + 9 + 4 + 3 = 22
3 + 4 + 7 + 6 + 2 = 22
2 + 6 + 8 + 5 + 1 = 22

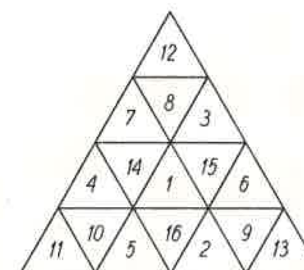


Jeszcze ciekawsze właściwości wykazują trójkąty tegoż typu złożone z 16 pól:



6 + 12 + 13 + 7 = 38
4 + 11 + 15 + 8 = 38
5 + 10 + 14 + 9 = 38

6 + 7 + 12 + 1 + 15 + 8 + 4 = 53
4 + 8 + 11 + 2 + 14 + 9 + 5 = 53
5 + 9 + 10 + 3 + 13 + 7 + 6 = 53



11 + 5 + 4 + 10 = 30
13 + 6 + 2 + 9 = 30
12 + 7 + 3 + 8 = 30

11 + 10 + 5 + 16 + 2 + 9 + 13 = 66
13 + 9 + 6 + 15 + 3 + 8 + 12 = 66
12 + 8 + 7 + 14 + 4 + 10 + 11 = 66



15. Magiczne wielokąty koncentryczne

W podanych tu pięciobokach rozmieszczone zostały liczby ciągu naturalnego od 1 do 75 w ten sposób, że suma liczb każdego boku zewnętrznego jest stała, na przykład:

$$1 + 54 + 49 + 75 + 9 + 32 + 27 + 2 = 249$$
$$2 + 53 + 48 + 74 + 8 + 33 + 28 + 3 = 249$$

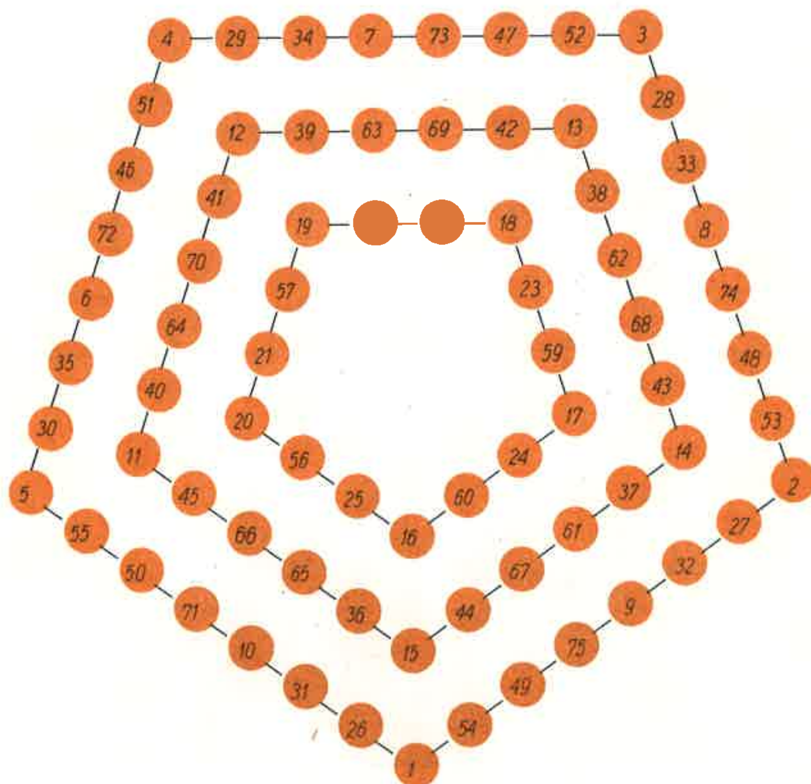
Tak samo suma każdego boku drugiego rzędu:

$$15 + 44 + 67 + 61 + 37 + 14 = 238$$
$$14 + 43 + 68 + 62 + 38 + 13 = 238$$

i podobnie suma każdego boku trzeciego rzędu:

$$16 + 60 + 24 + 17 = 117$$
$$17 + 59 + 23 + 18 = 117$$

Warto zauważyć, że liczby 1, 2, 3, 4, 5 leżą w wierzchołkach pięcioboku foremnego. Podobnie też, jeżeli połączymy piątkę liczb 6, 7, 8, 9, 10, to znowu otrzymamy pięciobok foremny — i tak dalej aż do ostatniej piątki 71, 72, 73, 74, 75.



Sześciobok magiczny podany na tej stronicy ma więcej jeszcze ciekawych właściwości, mianowicie:

1° Sumy boków są magiczne, na przykład:

$$73 + 11 + 71 + 13 + 12 + 72 + 7 = 259$$
$$55 + 26 + 27 + 54 + 23 = 185$$
$$43 + 35 + 33 = 111$$

Przy tym sumy magiczne są wielokrotnościami liczby 37.

2° Suma liczb w wierzchołkach każdego sześcioboku też jest magiczna:

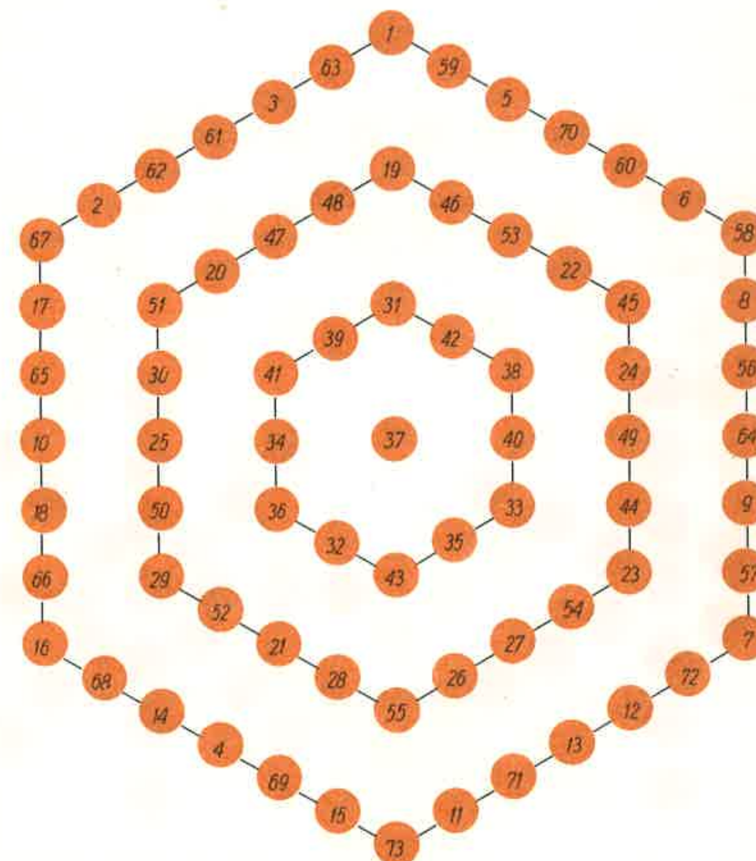
$$1 + 58 + 7 + 73 + 16 + 67 = 222$$
$$19 + 45 + 23 + 55 + 29 + 51 = 222$$

3° Suma liczb na przekątnych jest również magiczna:

$$1 + 19 + 31 + 37 + 43 + 55 + 73 = 259$$
$$7 + 23 + 33 + 37 + 41 + 51 + 67 = 259$$

4° Suma liczb na osiach symetrii boków jest magiczna:

$$70 + 53 + 42 + 37 + 32 + 21 + 4 = 259$$
$$10 + 25 + 34 + 37 + 40 + 49 + 64 = 259$$



16. Koła magiczne

Najprostszy typ koła magicznego tworzy się przez rozstawienie liczb w punktach przecięcia średnic koła z okręgami koncentrycznymi. Na pierwszym rysunku trzy średnice przecinają się z trzema okręgami w 18 punktach. Należy więc w punktach tych rozstawić 18 liczb ciągu naturalnego od 1 do 18 w taki sposób, żeby suma liczb stojących czy to na okręgu, czy też wzdłuż średnicy była zawsze ta sama. Owa suma magiczna powinna wynosić

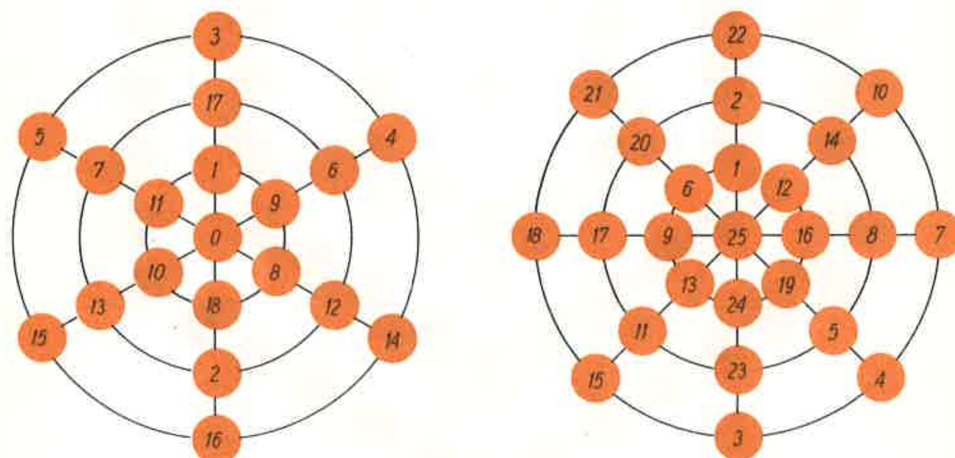
$$\frac{18 \cdot (18+1)}{2} \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 19 = 57$$

Wypiszmy ów szereg liczb od 1 do 18 w taki sposób:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	17	16	15	14	13	12	11	10

Suma każdej pary wynosi 19, wystarczy więc liczby wpisywać tak, żeby każde dwa symetryczne punkty w kole były zajęte przez jedną parę, a osiągniemy w tak prosty sposób magiczność sum liczb i „okręgowych", i „średnicowych".

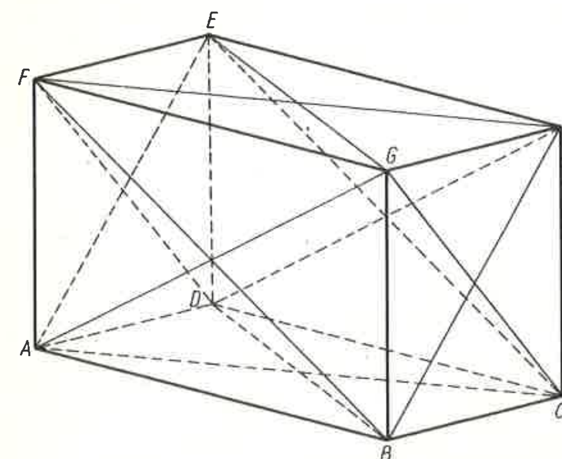
Zamiast trzech średnic można nakreślić cztery średnice przy tej samej, co poprzednio, liczbie okręgów. Punktów przecięcia będzie wówczas $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Sposób budowy tego koła jest zupełnie identyczny; konieczne jest jednak postawienie w środku koła zamiast 0 liczby, która stanowi sumę owych par ($24 + 1 = 25$, $23 + 2 = 25$, ...) rozmieszczonych w punktach symetrycznych, gdyż okręgi będą liczyły par tych 4, a średnice tylko 3.



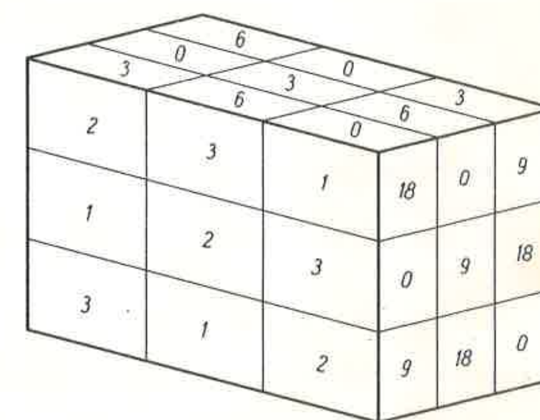
17. Magiczne sześciany

Podzielmy sześcian *ABCDEFGH* (rys. I) na 27 drobnych kubików. W tym celu należy każdą ścianę sześcianu podzielić na 9 kwadratów i przeprowadzić płaszczyzny wewnętrzne łączące boki owych kwadratów. Sześcian będzie *półmagiczny*, jeśli suma liczb (umieszczonych jakby wewnątrz kubików-celek) będzie ta sama dla każdej grupy 9 celek leżących w jednej wspólnej płaszczyźnie, a oddzielonych czy to cięciami pionowymi, czy poziomymi.

Sześcian będzie *w pełni magiczny*, jeśli prócz tego suma liczb dziewięciu celek leżących w którejkolwiek z sześciu płaszczyzn przekątnych, więc *ACHF*, *BDEG*, *ABHE*, *FGCD*, *AGHD* albo *BFEC* — będzie również magiczna.



Rys. I


Rys. II

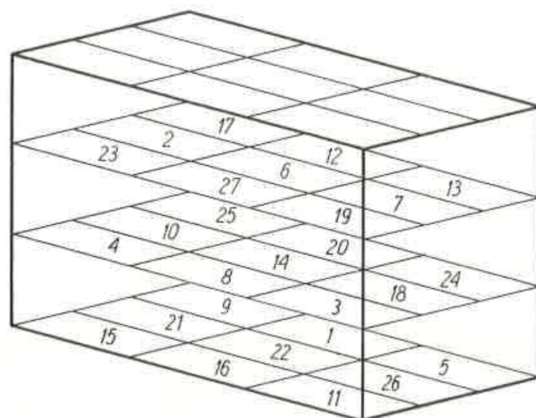
Sumę magiczną dla sześcianu podzielonego na 27 części odszukać nietrudno. Suma szeregu wynosi:

$$1 + 2 + \ldots + 27 = \frac{27 \cdot (27+1)}{2} = 378,$$

suma zaś magiczna wynosi $^1/_3$ tej sumy szeregu, czyli 126.

Najdogodniejszą metodą rozstawiania liczb w sześcianie magicznym jest przystosowana do tego przeż niewielkie zmiany metoda kwadratów pomocniczych La Hire'a, poznana przy budowie kwadratów magicznych. Rozmieszczamy owe kwadraty pomocnicze jakby na powierzchni trzech ścian sześcianu ze wspólnym wierzchołkiem B (rys. I i II) i następnie dla każdego kubika sumujemy odpowiadające jego ścianom liczby. Więc np. dla celki u samego wierzchołka B otrzymujemy w ten sposób liczbę $0 + 2 + 9 = 11$, przy wierzchołku A liczbę $3 + 3 + 9 = 15$, dla celki centralnej $3 + 2 + 9 = 14$ i tak dalej.

Gdybyśmy trzema poziomymi płaszczyznami równoległymi przecięli sześcian przez środek każdej warstwy celek, to otrzymalibyśmy wszystkie liczby jakby na tych płaszczyznach wypisane (rys. III). Widzimy, że istotnie suma liczb leżących na każdej płaszczyźnie wynosi 126.



Rys. III

Moglibyśmy rozciąć sześcian równoległymi płaszczyznami pionowymi, a otrzymalibyśmy zespoły liczb, które zresztą i z rysunku powyższego łatwo zestawić, więc np. dla środkowej płaszczyzny pionowej równoległej do $ABGF$ będą to liczby:

$$2 + 6 + 7 + 10 + 14 + 18 + 21 + 22 + 26 = 126,$$

dla płaszczyzny pionowej przyległej do $BCHG$ liczby:

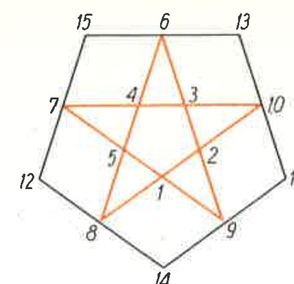
$$23 + 2 + 17 + 4 + 10 + 25 + 15 + 21 + 9 = 126.$$

Podobnie dla płaszczyzn przekątnych, na przykład dla $ACHF$:

$$23 + 6 + 13 + 4 + 14 + 24 + 15 + 22 + 5 = 126.$$



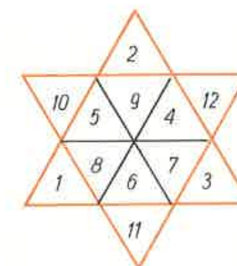
18. Gwiazdy magiczne



$1 + 2 + 4 + 15 = 22$
$2 + 3 + 5 + 12 = 22$
$3 + 4 + 1 + 14 = 22$
$4 + 5 + 2 + 11 = 22$
$5 + 1 + 3 + 13 = 22$
$1 + 8 + 5 + 13 = 27$
$2 + 9 + 1 + 15 = 27$
$3 + 10 + 2 + 12 = 27$
$4 + 6 + 3 + 14 = 27$
$5 + 7 + 4 + 11 = 27$

$11 + 10 + 13 = 34$
$13 + 6 + 15 = 34$
$15 + 7 + 12 = 34$
$12 + 8 + 14 = 34$
$14 + 9 + 11 = 34$
$6 + 15 + 7 + 4 = 32$
$7 + 12 + 8 + 5 = 32$
$8 + 14 + 9 + 1 = 32$
$9 + 11 + 10 + 2 = 32$
$10 + 13 + 6 + 3 = 32$

$6 + 9 + 7 + 15 = 37$
$7 + 10 + 8 + 12 = 37$
$8 + 6 + 9 + 14 = 37$
$9 + 7 + 10 + 11 = 37$
$10 + 8 + 6 + 13 = 37$



$10 + 5 + 9 + 4 + 12 = 40$
$12 + 4 + 7 + 6 + 11 = 40$
$11 + 6 + 8 + 5 + 10 = 40$

$2 + 9 + 4 + 7 + 3 = 25$
$3 + 7 + 6 + 8 + 1 = 25$
$1 + 8 + 5 + 9 + 2 = 25$

$10 + 2 + 12 + 3 + 11 + 1 = 39$
$5 + 9 + 4 + 7 + 6 + 8 = 39$

IV

PSEUDARIA

UWAGI OGÓLNE

Wielki matematyk grecki Euklides (żył około 300 r. p. n. e.) prócz swych słynnych *Elementów* napisał dzieło bardzo dziwne — *Pseudaria.* Składało się ono z różnego rodzaju błędnych rozumowań, które mogą stać się udziałem młodzieńca stawiającego pierwsze kroki na polu matematyki, a w szczególności geometrii. Doskonałym ćwiczeniem dla takiego debiutanta w trudnej sztuce myślenia było odnajdywanie (bez pomocy mistrza), gdzie tkwi w danym rozumowaniu pomyłka, na czym właściwie polega błąd.

To dzieło Euklidesa nie dochowało się do naszych czasów. Pozostała po nim tylko tradycja, której składając hołd podajemy garść przeróżnych błędnych rozumowań, paralogizmów, sofizmatów i paradoksów z zakresu geometrii, arytmetyki i algebry.

Jedne z nich polegają na prostym złudzeniu optycznym, inne na złudzeniu raczej słuchowym, jakby niedosłyszeniu, niezauważeniu pewnych założeń, które zasadniczo zmieniają treść zagadnienia; w tym przypadku wiele zależy nie tylko od formy pytania, ale i od intonacji, jaką nadaje się poszczególnym jego składnikom.

W innych znów paralogizmach błąd ukrywa się w samym założeniu, w źle zastosowanym prawidle, w pozornym nieprawdopodobieństwie, w przepuszczeniu jednego ogniwa łańcucha sylogizmów, w nieuzasadnionym uogólnieniu przypadku wyjątkowego itp.

Jak w poprzednich rozdziałach, tak i tu, obok rozmaitości typów znajdzie Czytelnik różną skalę rzeczy łatwiejszych oraz nieco trudniejszych. Przy jednych podane będą wyjaśnienia, przy innych krótkie tylko wskazówki, w jakim kierunku iść należy przy odszukiwaniu błędu, a będą i takie, których rozwiązanie pozostawione zostało w zupełności inwencji Czytelnika.

1. Złudzenia optyczne

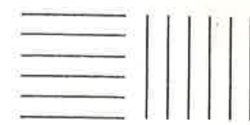
Złudzeń optycznych jest bardzo wiele, przytoczymy więc tu kilka tylko przykładów prostych i stanowiących pewne odmiany charakterystyczne.

A. Złudzenia spowodowane szczególnym ułożeniem linij i figur

Odcinek ustawiony pionowo wydaje się nam dłuższy niż tej samej długości odcinek ustawiony poziomo (rys. I).



Rys. I



Rys. II

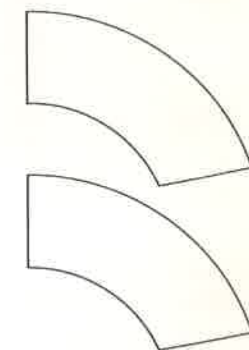
Kwadrat zakreskowany pionowo robi wrażenie szerszego niż równy mu kwadrat zakreskowany poziomo (rys. II).



Rys. III

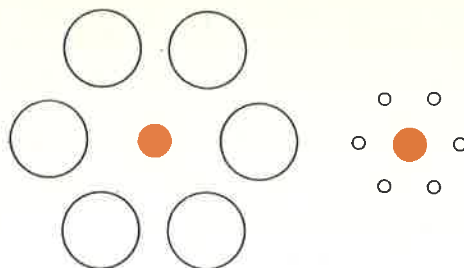
Na rysunku III wydaje się, że nie tylko dolne punkty krążków leżą na linii krzywej wygiętej ku dołowi, ale również i górne punkty tych krążków leżą na linii krzywej zwisającej.

Na rysunku IV mamy dwie figury umieszczone jedna nad drugą. Przy takim układzie figur dolny brzeg górnej figury jest wyraźnie krótszy od sąsiadującego z nim górnego brzegu dolnej figury, z tego powstaje wrażenie, że i cała górna figura jest mniejsza od dolnej.



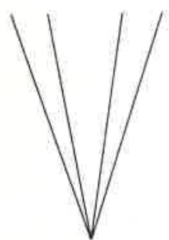
Rys. IV

B. Złudzenia spowodowane przez kontrasty otoczenia



Środkowe koła na powyższych rysunkach są równe, ale koło otoczone sześciu wielkimi kołami wydaje się mniejsze od koła otoczonego sześcioma małymi kołami. Takie jest zwodnicze oddziaływanie kontrastów otoczenia.

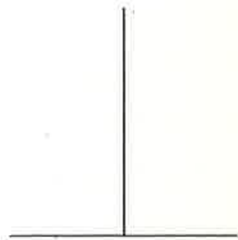
Na rysunkach I i II środkowe kąty są równe, ale kąt znajdujący się między dwoma większymi od niego kątami jak gdyby się zwęża, a kąt znajdujący się między dwoma mniejszymi kątami jakby się rozszerza. Znowu stwierdzamy powstawanie złudzenia wskutek kontrastów otoczenia.



Rys. I

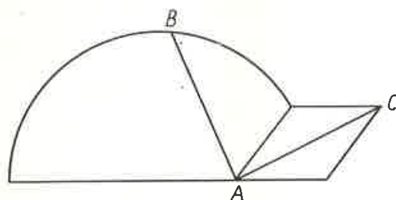


Rys. II

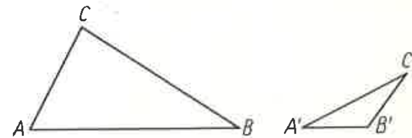


Rys. III

Na rysunku III odcinek pionowy wydaje się większy niż poziomy, chociaż w rzeczywistości odcinki te są równe.



Rys. IV

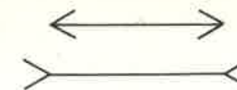


Rys. V

Na rysunku IV odcinek AB wydaje się znacznie dłuższy niż odcinek AC, a w rzeczywistości odcinki te są równe.

Bok AC większego trójkąta na rysunku V wydaje się większy od boku $A'C'$ mniejszego trójkąta, gdy tymczasem $A'C' = AC$.

C. Złudzenia spowodowane odwróceniem uwagi



Rys. I

Patrząc na rysunek I zdajemy sobie sprawę, że narysowane jeden pod drugim odcinki są równoległe i równe, a jednak strzałki umieszczone na końcach odcinków odwracają uwagę w taki sposób, że powstaje złudzenie, jakoby dolny odcinek był dłuższy od górnego.

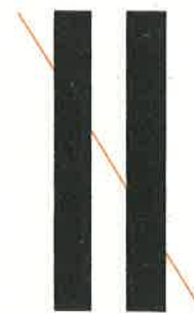


Rys. II

Nie ma chyba człowieka, który by się potrafił oprzeć złudzeniu, że odległość między dziobami pierwszej i drugiej jaskółki na rysunku II jest mniejsza niż odległość między dziobami drugiej i trzeciej jaskółki. A jednak dzioby jaskółek na rysunku są w równych odległościach.

D. Złudzenia wywołane naruszeniem rytmu

Linia prosta przecięta pod dość ostrym kątem dwoma prostokątnymi paskami wydaje się pocięta na części nie leżące na jednej prostej (rys. I).

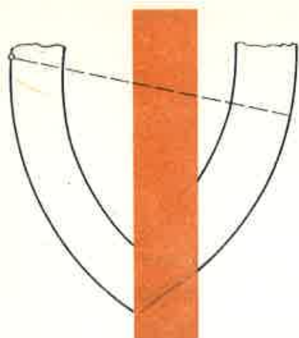


Rys. I



Rys. II

Linie pochyłe leżące po prawej stronie paska na rysunku II zbiegają się w przedłużeniu z liniami pochyłymi lewej strony w punktach zetknięcia z pionowym brzegiem paska — wbrew wrażeniu, które się odnosi przy patrzeniu na rysunek z góry.

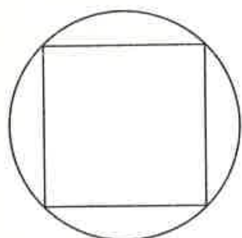


Rys. III

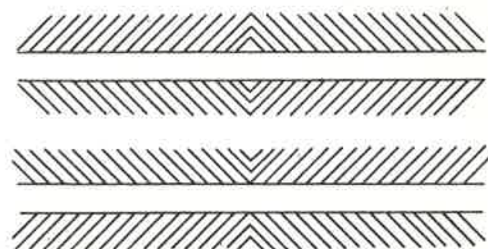
Jeszcze bardziej efektowny jest rysunek III. Można setkom ludzi zadać pytanie, czy łuki leżące po lewej stronie paska (są to łuki okręgów) spotkają się po przedłużeniu z końcami łuków leżących po prawej stronie; zawsze się usłyszy odpowiedź przeczącą. A jednak wystarczy wziąć cyrkiel i sprawdzić, że promienie łuków po lewej stronie równają się promieniom łuków po prawej stronie. Nawet po sprawdzeniu nie można się pozbyć złudnego wrażenia.

Kwadrat wpisany w okrąg (rys. IV) powoduje złudzenie deformacji okręgu: przy wierzchołkach kwadratu okrąg wydaje się mniej wypukły niż nad środkowymi częściami boków kwadratu.

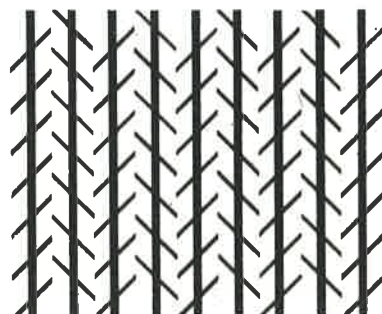
Zmienna rytmika kreskowania po obu stronach pasa ograniczonego dwiema prostymi równoległymi (rys. V) powoduje złudzenie, że pas rozszerza się w środkowej części albo się zwęża, zależnie od rodzaju kreskowania.



Rys. IV



Rys. V

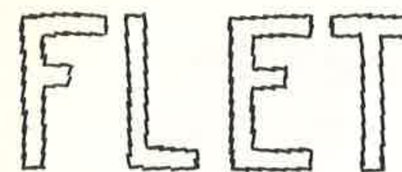


Rys. VI

Jeszcze bardziej zadziwiający jest efekt wywołany naruszeniem rytmu na rys. VI: jeżeli spojrzymy na rysunek z dołu „pod światło" w taki sposób, żeby wzrok ślizgał się tuż nad powierzchnią papieru, to stwierdzimy, że grubsze czarne linie są równoległe; natomiast przy zwykłym oglądaniu z góry wydaje się, że linie te bądź schodzą się, bądź rozchodzą, zależnie od kierunku ukośnych kresek.

Słynne jest złudzenie z literami napisanymi za pomocą szeregu ukośnych kresek.

Słowo FLET na rysunku VII zdaje się być napisane zupełnie prosto stojącymi literami. Gdy jednak narysujemy kontury liter ukośnymi kreskami

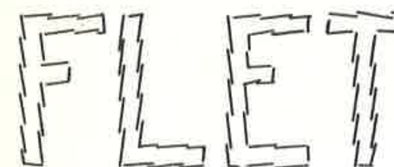


Rys. VII

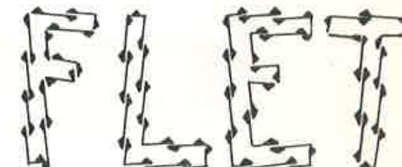


Rys. VIII

o różnych kierunkach, to litery te na rysunku VIII stają się ukośne. Gdy zaś wydłużymy kreseczki albo na ich końcach dodamy małe trójkąciki, wrażenie ukośności będzie wzrastało, jak to widzimy na rysunkach IX i X.



Rys. IX

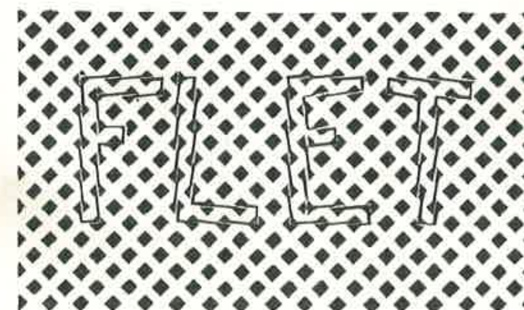


Rys. X

Wystarczy jednak spojrzeć na wszystkie te rysunki zmrużonymi oczyma przez rzęsy, a okaże się, że litery znowu stoją prosto.

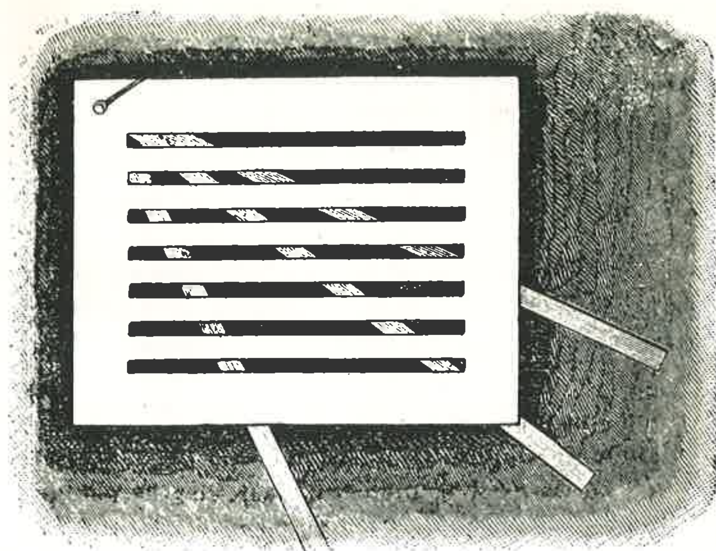
E. Złudzenia spowodowane tłem, na którym znajdują się linie lub figury

Owe litery wyrazu FLET, umieszczone na tle z ukośnie ustawionych kwadratów, skaczą tak nieprawdopodobnie, że nikt kto sam nie sprawdzi tego ekierką, nie uwierzy, że pisane są zupełnie prosto.



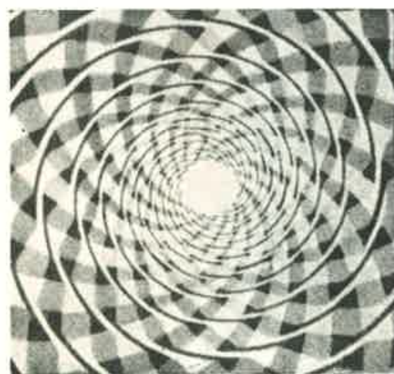
Rys. I

Ciekawe doświadczenie można wykonać z kartonami białym i popielatym, przyrządziwszy z jednego rodzaj zasłonki z podłużnymi lukami, z drugiego zaś linię, jak to wskazuje poniższy rysunek. Linia ta, przesuwana ku położeniu coraz bardziej ukośnemu będzie dawała coraz wyraźniejsze złudzenie linii złamanej.

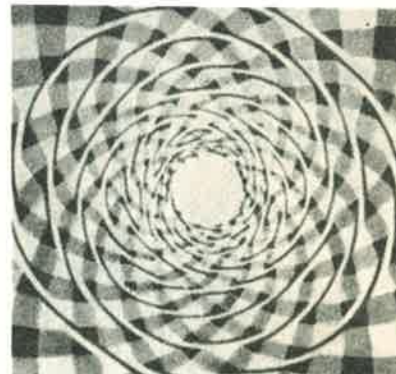


Rys. II

Najbardziej nieprawdopodobne są złudzenia, jakim ulegamy przypatrując się figurom na rysunkach III i IV. Można patrzeć na nie godzinami z bliska i z daleka, wprost i ukośnie, a nie straci się ani na chwilę iluzji, że widzimy



Rys. III

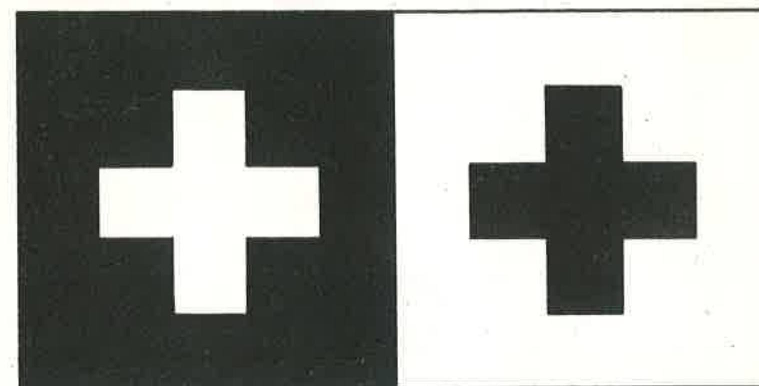


Rys. IV

linie spiralne, krzywe, bardzo dalekie od harmonijnego kształtu kół. A tymczasem w obu tych rysunkach mamy do czynienia z zupełnie prawidłowymi kołami koncentrycznymi.

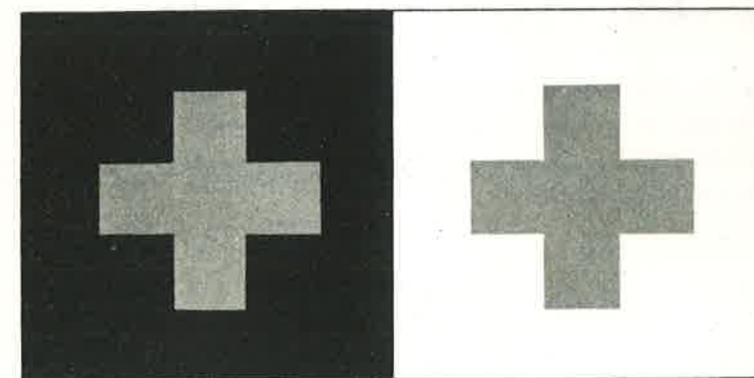
F. Złudzenia powstające wskutek kontrastu: czarne — białe

Na rysunku I krzyże są równe, ale biały krzyż na czarnym tle wydaje się większy niż czarny krzyż na białym tle.



Rys. I

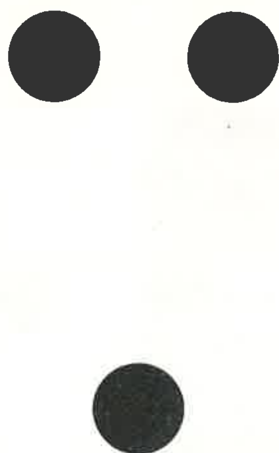
A na rysunku II krzyże są szare, o jednakowym natężeniu barwy, ale wskutek kontrastów z otoczeniem szary krzyż na białym tle wydaje się ciemniejszy niż taki sam krzyż na czarnym tle.



Rys. II

A oto jeszcze jedno ciekawe złudzenie optyczne wywołane przez kontrast:

Między dwoma górnymi kołami może się zmieścić jedno takie koło, a między każdym z górnych kół i dolnym kołem można zmieścić równo trzy



koła. Wydaje się jednak, że odstęp między górnymi kołami jest większy od średnicy tych kół i że między którymkolwiek z górnych kół i dolnym kołem zmieszczą się co najmniej cztery takie koła, zwłaszcza gdy się patrzy z daleka.

Zanotujemy tu jeszcze pewne złudzenie optyczne, które nie ma podstaw obiektywnych, ale jedynie psychologiczne.

Wielu ludzi stwierdza, że zwierciadlane odbicie drukowanego wyrazu jest jakieś bardziej szare niż sam wyraz, aczkolwiek oba te wyrazy są drukowane tą samą farbą drukarską.

odbicie

Może „szarość" ta jest skutkiem trudności odczytania odwróconego wyrazu. Byłaby to przyczyna natury psychologicznej.

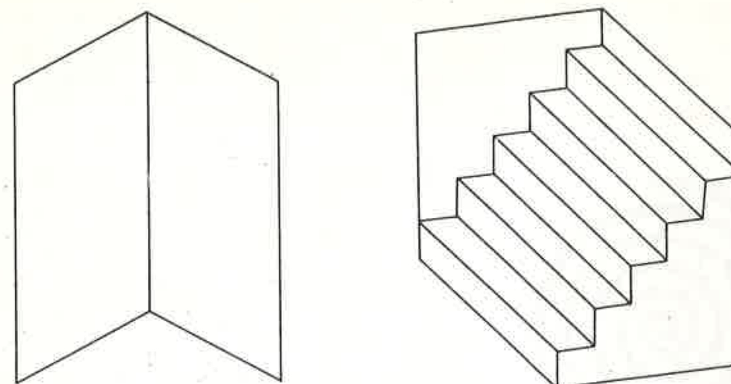
Przyczyny psychologiczne sprawiają prawdopodobnie też, że górne połowy drukowanych liter i cyfr

S X 38

wydają się równe dolnym połowom — i dopiero odwrócenie czcionek wykrywa błąd.

G. Przestrzenne złudzenia optyczne

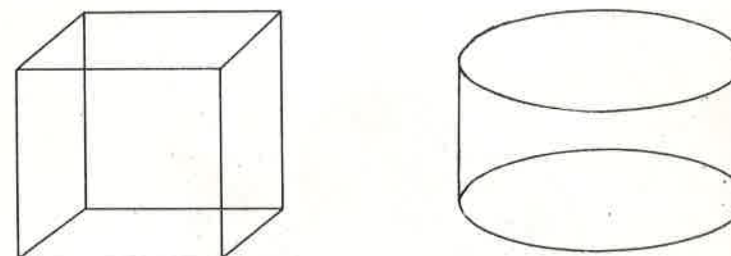
Jest to specjalny typ złudzeń wywołanych przez pewne figury trójwymiarowe: jedne — traktowane jako nieprzejrzyste, inne — jako przezroczyste, inne wreszcie — jako raz przejrzyste, drugi raz nieprzejrzyste.



Złudzenie polega tym razem na pozornej zmienności punktów widzenia.

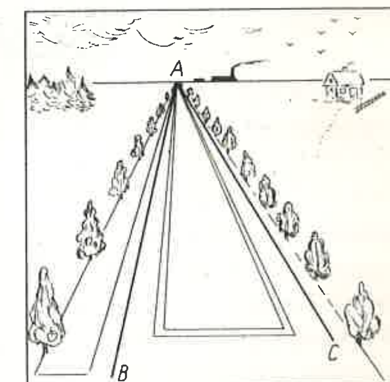
Narysowany za pomocą siedmiu linij i przełamany przez środek kartonik widzimy raz od wewnątrz, to znów od zewnątrz.

Na słynne schody Zöllnera patrzymy to od góry, to od spodu, jakby stanowiły część jakiegoś osobliwego pułapu.



Podobnie rzecz się ma z sześcianem szklanym, to znaczy przejrzystym: widzimy go raz z prawa od góry, to znowu z lewa od dołu.

Ten zaś walec, jeżeli wyobrazimy go sobie przezroczystym, da nam podobne jak w sześcianie złudzenia, gdy zaś traktować go będziemy jako nieprzejrzysty, wtedy przedstawi się jako ścięty ukośnie z obu końców w kierunku ku przodowi.



Gdy patrzymy na umieszczony obok rysunek perspektywiczny, nie możemy się oprzeć wrażeniu, że odcinek AC jest na tym rysunku krótszy niż odcinek AB, chociaż bezpośredni pomiar stwierdza równość tych odcinków.

H. Złudzenia ruchu

Jeżeli przez dłuższy czas będziemy patrzyli na poruszające się w jednym kierunku przedmioty, a potem przerzucimy wzrok na tło nieruchome, to powstanie tak zwany „powidok ujemny", czyli obraz pozornego ruchu w kierunku przeciwnym. Jeśli na przykład będziemy przez pewien czas patrzyli ze statku na uciekającą spod niego wodę, a potem przerzucimy wzrok na pusty pokład lub na brzeg rzeki, to doznamy wrażenia ruchu w kierunku przeciwnym — będzie to ujemny powidok pierwszego ruchu.



Przyglądajmy się przez pewien czas tarczy z rysunkiem linii spiralnej. Jeżeli potem zaczniemy obracać tarczę w kierunku biegu wskazówek zegara, to powidok spowoduje wrażenie, jakoby pierścienie ściągały się do środka tarczy; jeżeli po pewnym okresie przyglądania się nieruchomej tarczy zaczniemy je obracać w kierunku przeciwnym biegowi wskazówek zegara, to zdawać się będzie, że pierścienie rozchodzą się odśrodkowo.

Gdy podany tu rysunek sześciu tarcz będziemy z wolna odkręcali, wówczas każda z tarcz będzie się pozornie obracała dokoła swego środka w tym kierunku, który nadamy całości. Złudzenie to, obecnie bardzo znane, do-



strzeżone po raz pierwszy przez uczonego angielskiego Sylwana Thompsona, wydało mu się czymś tak niezwykłym, iż sądził, że dla jego wytłumaczenia trzeba będzie odszukać jakąś nową, nie znaną jeszcze właściwość wzroku. Wyjaśnia się ono jednak dostatecznie znaną skłonnością siatkówki do zachowywania otrzymanych wrażeń przez pewien ułamek sekundy.

2. Zadania zwodnicze

A. Kapryśna gąsienica. W niedzielę o godzinie 6 rano zaczęła pewna gąsienica wpełzać na drzewo. W ciągu dnia, tj. do godziny 6 wieczorem, dosięgnęła wysokości 5 metrów, ale przez noc spełzła z powrotem 2 metry. I tak było w poniedziałek i we wtorek, i co dzień, bo takie to są gąsienicze kaprysy. W którym dniu i o której godzinie doszła gąsienica do czubka drzewa wysokości 12 metrów?

Na pierwszy rzut oka czy ucha (jeśli zadania tego nie odczytuje się, lecz się je słyszy) każdy ma ochotę rozwiązać je bardzo prędko i łatwo: Na dobę — wchodząc na dzień 5 metrów, a zniżając się w nocy o 2 metry — wpełza gąsienica w rezultacie 3 metry, dojdzie więc do wierzchołka drzewa po upływie 4 dni, to znaczy we czwartek o godzinie 6 rano. A jednak o tej porze już dawno pewnie gąsienica zapomni o swej żmudnej wyprawie i zdoła się oprząść w kokon...

B. Zreumatyzmowany zegarek. Zegarek mój dziwnie jest wrażliwy na zmianę temperatury: w ciągu dnia śpieszy się o $\frac{1}{2}$ minuty, a w nocy spóźnia się o $\frac{1}{3}$ minuty. Oblicz szybko, Czytelniku bystry, w którym momencie zegarek będzie się śpieszył o 5 minut, jeśli w dniu 1 kwietnia (prima aprilis!) z początkiem dnia pokazywał dokładną godzinę? Czy będzie to jeszcze w kwietniu?



C. Koty. Zadanie stare, ale jare. Pokój ma cztery kąty; w każdym kącie siedzi kot. Naprzeciwko każdego kota siedzą 3 koty, a na ogonie każdego kota siedzi 1 kot. Ile kotów było wszystkich razem?

Zatrzęsienie, nieprawdaż?... A jednak były w tym pokoju tylko cztery koty.

D. Trzy krótkie a łatwe pytania. Drwalom za każde przecięcie pnia płaci się złotówkę; pień długości 12 metrów musi być pocięty na walce półmetrowe. Ile zarobią drwale?

Jeden kopacz w ciągu 8 godzin wykopie studnię mającą w otworze 1 metr kwadratowy, a głębokości 4 metry. W ciągu ilu godzin wykopie tę studnię 8 kopaczy?

Wyjrzawszy na skręcie linii kolei przez okno spostrzegłem, że przede mną jest 8 wagonów, a poza mną 5. Z ilu wagonów składał się pociąg, którym jechałem?

3. Sofizmaty arytmetyczne

A. $1 = 2$

Nikt nie jest w możności zaprzeczyć, że

$$3 - 1 = 6 - 4.$$

Jeżeli obie strony tej oczywistej równości pomnożymy przez (-1), to otrzymamy

$$1 - 3 = 4 - 6.$$

Do obu stron równości możemy dodać jednakowe liczby:

$$1 - 3 + \tfrac{9}{4} = 4 - 6 + \tfrac{9}{4}.$$

Obie strony równości stanowią kwadraty dwóch różnic:

$$\left(1 - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \tfrac{3}{2}\right)^2.$$

Z obu stron wyciągamy pierwiastek drugiego stopnia:

$$1 - \tfrac{3}{2} = 2 - \tfrac{3}{2}.$$

Do obu stron dodajemy tę samą liczbę $\frac{3}{2}$; mamy do tego zupełne prawo. Otrzymamy wówczas

$$1 = 2.$$

B. $2 = 3$

Dowieść tego można rozumując takim samym tokiem myśli.
Rozważmy kolejno takie równości:

$$4 - 10 + \tfrac{25}{4} = 9 - 15 + \tfrac{25}{4}; \quad \left(2 - \tfrac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \tfrac{5}{2}\right)^2$$

$$2 - \tfrac{5}{2} = 3 - \tfrac{5}{2}; \quad 2 = 3.$$

Oba te sofizmaty polegają na fałszywych przesłankach logicznych. Jest to tak, jakby ktoś rozumował sylogizmem następującym:

Pies jest zwierzęciem.
Koń jest zwierzęciem.
A więc pies i koń to jest to samo.

Tutaj w grę wchodzi sylogizm podobny:

Dwie równe liczby mają równe kwadraty.
Te dwie liczby mają równe kwadraty.
A więc te dwie liczby są równe.

Zapomina się o tym, że kwadraty liczb ujemnych są dodatnie, podobnie jak kwadraty liczb dodatnich.

4. Sofizmaty algebraiczne

A. Niepewny wynik pomimo stosowania pewnika

Zdawałoby się zaiste, że nie ma na świecie nic pewniejszego nad... pewniki matematyczne. A oto jednak przykład, z którego wynika, że można prawidłowo zastosować elementarne wprost pewniki do bardzo prostych działań algebraicznych — i otrzymać rezultat zupełnie błędny.

Weźmy równanie $x - 1 = 2$.

Zastosujemy pewnik: *mnożąc dwie równe wielkości przez tę samą wielkość otrzymujemy iloczyny równe.* Mnożymy mianowicie obie strony naszego równania przez $x - 5$, a otrzymamy

$$x^2 - 6x + 5 = 2x - 10.$$

Dalej znów stosując odpowiedni pewnik odejmujemy od obu stron równania liczbę $x - 7$, a otrzymujemy

$$x^2 - 7x + 12 = x - 3.$$

Dzielimy obie strony równania przez $x - 3$:

$$x - 4 = 1.$$

A gdy wreszcie do obu stron dodamy 4, otrzymamy $x = 5$, co jest oczywistym błędem.

Rozumowaliśmy zupełnie prawidłowo, stosując pewniki niewątpliwe, w działaniach nie popełniliśmy — zdawałoby się — ani jednej omyłki, a jednak otrzymaliśmy rezultat błędny.

B. Poprawny wynik pomimo błędnego rozumowania

A teraz pokażemy, że można wyraźnie zgrzeszyć przeciw któremuś z pewników, a jednak otrzymać rezultat najzupełniej bezbłędny.

Wyjdziemy z tego samego równania

$$x - 1 = 2.$$

Do jednej tylko — o zgrozo! — jego strony dodajemy 10:

$$x + 9 = 2.$$

Mnożymy obie strony przez $x - 3$:

$$x^2 + 6x - 27 = 2x - 6.$$

Odejmujemy od obu stron $2x - 6$:

$$x^2 + 4x - 21 = 0.$$

Dzielimy obie strony przez $x + 7$ i otrzymujemy

$$x - 3 = 0, \quad \text{czyli } x = 3,$$

co jest zgodne z równaniem $x - 1 = 2$.

Na czym polegały nasze błędy w obu przypadkach?

Na tym, że pewniki, które stosowaliśmy, nie przewidują mnożenia i dzielenia przez 0, tymczasem myśmy to stosowali dzieląc i mnożąc przez $x - 3$.

Ale... skąd można było przed rozwiązaniem zadania przewidzieć, że $x = 3$? Istne błędne koło! Jak zeń wybrnąć?

C. Każda liczba równa się swojej połowie

Wiadomo, że

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Równość ta jest prawdziwa także w przypadku, gdy $a = b$. Wówczas

$$(a + a)(a - a) = a^2 - a^2.$$

Prawą stronę tego równania możemy tak napisać:

$$(a + a)(a - a) = a(a - a)$$

Obie strony dzielimy przez $(a - a)$ i otrzymujemy

$$a + a = a, \quad \text{czyli } 2a = a, \quad \text{skąd } a = \tfrac{1}{2}a.$$

D. Każda liczba równa się każdej innej

Niechaj c będzie średnią arytmetyczną dwóch nierównych liczb a i b, to znaczy

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

Wtedy

$$a + b = 2c.$$

Stąd

$$(a + b)(a - b) = 2c(a - b)$$

czyli

$$a^2 - b^2 = 2ca - 2cb.$$

Przenosząc obie strony tych równań z odpowiednimi zmianami znaków otrzymujemy

$$a^2 - 2ac = b^2 - 2bc.$$

Dodajemy do obu stron c^2:

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$$
$$(a - c)^2 = (b - c)^2$$
$$a - c = b - c$$
$$a = b$$

Wynik paradoksalny!

Tego samego dowieść można trochę inaczej. Powiedzmy, że a i b są to liczby nierówne, przy czym a jest większe od b, tak że $a - b = c$. Stąd otrzymujemy równość

$$a = b + c.$$

Mnożymy obie strony tej równości przez $a - b$:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc,$$

skąd

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc,$$

więc

$$a(a - b - c) = b(a - b - c),$$

czyli ostatecznie $a = b$, choć wyszliśmy z założenia, że a nie równa się b.

E. Zero jest większe od każdej liczby

Weźmy dowolną liczbę dodatnią, choćby bardzo wielką, i oznaczmy ją literą a. Otóż niewątpliwie

$$a - 1 < a.$$

Mnożymy obie strony nierówności przez $(-a)$; otrzymamy

$$-a^2 + a < -a^2.$$

Dodajemy do obu stron nierówności a^2; wówczas okaże się w sposób oczywisty, że

$$a < 0.$$

Chociaż więc według naszego założenia a przedstawia liczbę dodatnią, jest ona jednak mniejsza od zera...



5. Sofizmaty geometryczne

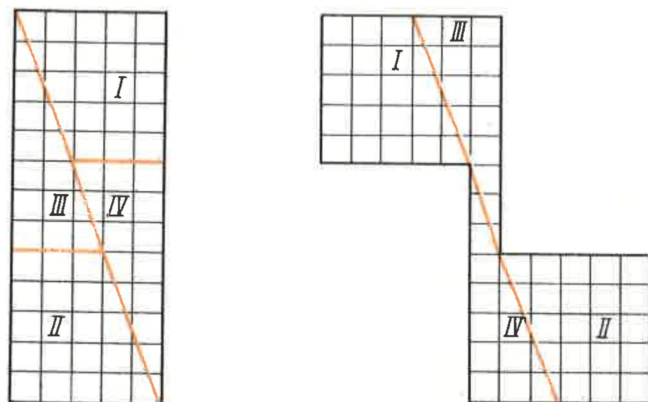
A. 65 = 64 = 63

Weźmiemy kwadrat dowolnej wielkości i podzielimy boki jego na 8 części. Przeprowadziwszy linie równoległe do obu boków otrzymamy 64 małe kwadraciki wypełniające wielki kwadrat.

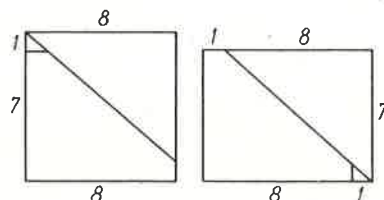
Kwadrat ten podzielimy na cztery części, z których (jak to w sposób oczywisty wynika z rysunku): $I = II$, a $III = IV$.

Jeśli następnie części te przełożymy, jak wskazują rysunki, to otrzymamy w pierwszym przypadku prostokąt, w drugim wielokąt (z kątami wklęsłymi), w których ilość małych kwadracików zupełnie równych kwadracikom pierwotnego kwadratu będzie, jak łatwo sprawdzić: 65 i 63. Takim więc dziwnym sposobem wypadło jednak, że

$$65 = 64 = 63.$$



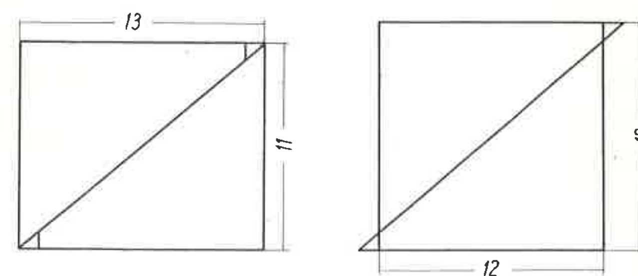
Drugiej części tych równości, tj. 64 = 63, dowieść można jeszcze inaczej, a nawet prościej.



Weźmiemy znów kwadrat $8 \times 8 = 64$, przetniemy go, jak wskazano na rysunku, i zsuniemy część górną ku podstawie, mały zaś trójkącik przeniesiemy z góry z lewa — w dół na prawo. Otrzymamy wówczas prostokąt $7 \times 9 = 63$. Z kwadratu liczącego 64 kwadraciki otrzymaliśmy prostokąt mieszczący 63 takież kwadraciki. A więc 64 = 63.

B. 143 = 145

W podobny sposób udowodnić można, że 145 = 143.



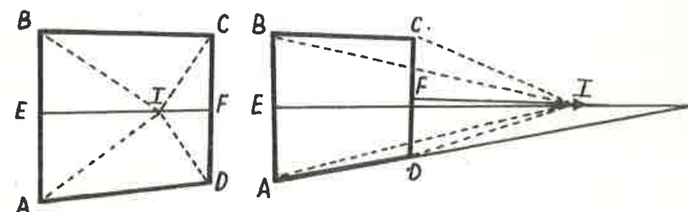
Weźmiemy tym razem prostokąt $13 \times 11 = 143$, przetniemy go przekątną i górną połowę posuniemy na prawo o $\frac{1}{13}$ podstawy. Otrzymamy wówczas kwadrat $12 \times 12 = 144$, a ponadto w dwóch przeciwległych rogach będziemy mieli dwa małe trójkąciki, które w sumie dadzą jeden jeszcze kompletny mały kwadracik sto czterdziesty piąty. A więc 143 = 145.

Na czym polega błąd w powyższych dowodzeniach, łatwo pozna każdy, kto ma grafion, dobry liniał i ekierkę.

Ale można błędność tych pozornych równości wykazać sposobem algebraicznym przy pomocy słynnego szeregu Leonarda F i b o n a c c i e g o z XIII w., o czym będzie mowa w drugim tomie rozrywek.

C. Kąt rozwarty równa się kątowi prostemu

Rozpatrzmy czworokąt $ABCD$, w którym kąt C jest prosty, kąt D jest rozwarty, a boki BC i AD są równe. Przeprowadźmy symetralne boków AB



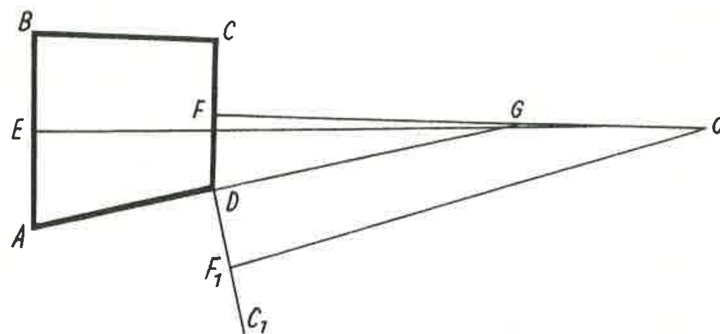
i CD, które przetną się w punkcie I. Te dwie prostopadłe nie mogą być wzajemnie równoległe, gdyż w takim razie równoległe również byłyby boki AB i CD, kąt B byłby więc prosty, a skoro założyliśmy, że $AD = BC$, więc i kąt D musiałby być prosty, co sprzeciwia się naszemu założeniu.

Jeśli tedy, jak wykazaliśmy, symetralne w punktach E i F nie mogą być równoległe, więc muszą się przeciąć bądź wewnątrz czworokąta $ABCD$, bądź poza obwodem czworokąta $ABCD$. Tę hipotezę rozpatrzymy później.

Tymczasem połączmy punkt I z czterema wierzchołkami czworokąta. Trójkąty ADI i BCI są równe, gdyż trzy ich boki są odpowiednio równe, a więc i kąt ADI równa się kątowi BCI. Podobnie okaże się, że kąt IDF równa się kątowi ICF. Ale suma kątów $BCI + ICF$ jest równa kątowi BCF, który, według pierwotnego założenia, jest kątem prostym. Więc też suma kątów $ADI + IDF = ADF$ jest kątem prostym, czyli kąt rozwarty równa się kątowi prostemu.

Jeśli teraz przystąpimy do rozpatrzenia drugiego przewidywanego przypadku, to znaczy, że przecięcie owych symetralnych w punkcie I wypadnie poza czworokątem, to przebieg naszego dowodzenia niewiele się odmieni. Łatwo się przekonamy, że kąt ADI równa się kątowi BCI. Jeśli zaś od obu tych równych kątów odejmiemy kąt FCI i równy mu kąt FDI, to otrzymamy potwierdzenie wyniku poprzedniego, że kąt ADC, równy kątowi BCD, jest kątem prostym.

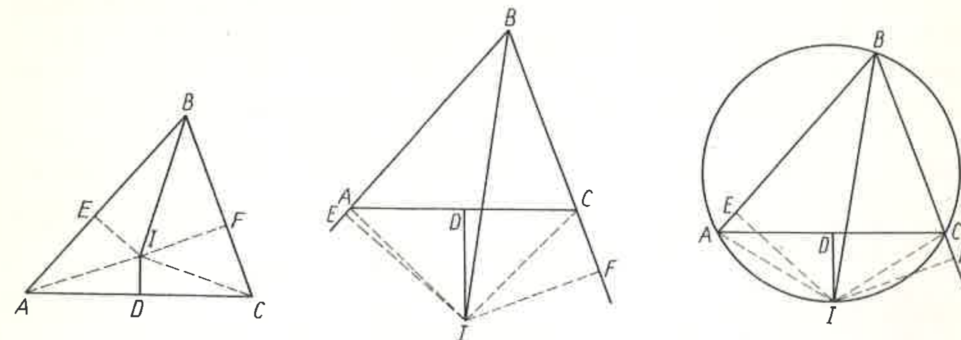
I w tym paralogizmie, jak w poprzednim, można za pomocą dobrego grafionu i ekierki łatwo wykryć, gdzie tkwi pomyłka; ale ważniejsze będzie wykazać błąd rozumowaniem. Wystarczy dowieść, że punkt I nie może przy założeniach, jakie postawiliśmy sobie, nigdy znaleźć się wewnątrz czworokąta, ale jest poza nim, i to nie między punktami F i G, lecz musi leżeć poza punktem G, to znaczy po drugiej stronie boku AD.



W tym celu w punkcie D przeprowadzimy prostopadłą do AD, odłożymy $DC_1 = DC$ i w środku F_1 poprowadzimy symetralną odcinka DC_1. Punkt O, miejsce przecięcia tej symetralnej z linią FG, będzie środkiem koła przechodzącego przez punkty C, D i C_1. Jeżeli figurę BCD obrócimy około środka O tak, żeby C przeszło na D, a D na C_1, to B upadnie na A. Stąd $OB = OA$, a więc symetralna wzniesiona w punkcie E musi przejść przez punkt O. Ten punkt O jest więc zarazem punktem przecięcia I symetralnych. A ponieważ prosta OF_1 jest równoległa do AD i znajduje się po innej stronie boku niż punkt C, więc punkty I i C muszą być po różnych stronach boku AD.

D. Każdy trójkąt jest równoramienny

Weźmy zupełnie dowolny trójkąt ABC. Przeprowadźmy dwusieczną kąta B i symetralną odcinka AC. Jeśli te dwie proste nie przetną się, to zejdą się w jedną linię i wówczas od razu okaże się, że obrany przez nas trójkąt jest równoramienny, mianowicie $AB = BC$. Jeśli zaś przetną się, to albo przetną się wewnątrz trójkąta, albo poza nim.



W pierwszym przypuszczeniu opuszczamy z punktu I prostopadłe IE i IF oraz przeprowadzamy linię AI i CI. Dwa trójkąty prostokątne BIE i BIF mają równe kąty B i wspólny bok BI, są więc równe, a więc $BE = BF$. Dwa inne trójkąty prostokątne AIE i CIF także są równe, gdyż mają równe przeciwprostokątne $IA = IC$ tudzież $IE = IF$. Stąd wynika, że $AE = CF$. Jeśli teraz do dwóch równych odcinków $BE = BF$ dodamy dwa równe odcinki $EA = FC$, to otrzymamy w sumie dwa odcinki także równe, mianowicie $BA = BC$. A więc trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym.

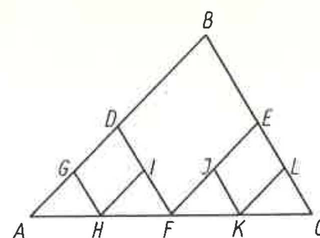
W drugim przypuszczeniu postępujemy podobnie i otrzymujemy rezultat identyczny, z tą tylko różnicą, że zamiast dodawania dwóch par równych odcinków mamy tu do czynienia z odejmowaniem takich odcinków; różnica otrzymana wykaże, że w tym przypadku dowolnie obrany trójkąt jest równoramienny.

Obalenie paralogizmu tego polega, jak w zadaniu poprzednim, na wykazaniu, że 1° punkt I nie może leżeć wewnątrz trójkąta, 2° że z dwóch prostopadłych poprowadzonych z punktu I do boków BA i BC tylko jedna może przeciąć odpowiedni bok na jego przedłużeniu, a druga prostopadła musi przeciąć bok w punkcie wewnętrznym. Jeśli przez wierzchołki tego dowolnego trójkąta przeprowadzimy okrąg koła, to zarówno symetralna odcinka AC, jak i dwusieczna kąta B muszą przeciąć łuk AIC w jego środku, czyli że punkt ich przecięcia I leży na okręgu, a więc musi być poza trójkątem.

Po wtóre, jeśli przypuścimy, że prostopadła z punktu I do boku BC przetnie ten bok na jego przedłużeniu w punkcie F, to kąt BCI jest kątem rozwartym. Ale kąty BCI i BAI są kątami spełniającymi się do 180°, z konieczności więc kąt BAI musi być ostry; a więc spodek prostopadłej opuszczonej z punktu I na AB musi się znajdować pomiędzy A i B. Nie może tedy być tak, by oba punkty C i F leżały na przedłużeniach boków.

E. W każdym trójkącie jeden bok równa się sumie dwóch pozostałych

Jest to sofizmat oparty nie na wadliwości rysunku, lecz na błędnym rozumowaniu, trudniejszy więc do obalenia.



Niechaj w dowolnym trójkącie ABC punkty D, E, F będą środkami jego boków. Przeprowadzamy linie DF i EF.

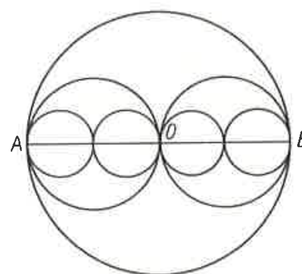
Wiadomo, że $DF = \frac{1}{2}BC = BE$ i $EF = \frac{1}{2}AB = BD$.

W ten sposób długość linii łamanej $ADFEC$ równa się $AB + BC$.

Jeżeli tę samą manipulację powtórzymy ponownie w obu otrzymanych tylko co trójkątach, to niewątpliwie długość linii łamanej $AGHIFJKLC$ równać się będzie $ADFEC$, czyli $AB + BC$. Jeżeli to postępowanie kontynuować będziemy nieograniczenie, to zauważymy, że wierzchołki owej linii łamanej będą się zbliżały do linii AC i ostatecznie linia łamana zleje się z linią AC. A więc $AC = AB + BC$.

F. Obwód koła równa się jego średnicy

W podobny sposób można dowieść, jak to widać na załączonym rysunku, że obwód koła równa się jego średnicy.



Obalenie obu powyższych sofizmatów polega na stwierdzeniu, iż długość wszystkich tych kolejnych linij — łamanych czy krzywych — nie jest wielkością zmienną, lecz stałą, jak to z samego przebiegu rozumowania wynika, a więc pozorna możliwość zlania się linij tych z podstawą trójkąta AC czy średnicą koła AB jest tylko skutkiem niedoskonałości naszych instrumentów i zmysłów.

6. Pozorne nieprawdopodobieństwo

A. Toczenie koła po kole

Weźmiemy dwa równe krążki, np. dwie jednakowe monety, i jedną unieruchomimy, drugą zaś będziemy toczyli ściśle po obwodzie owej nieruchomej. Ile razy obróci się toczona moneta przy jednym okrążeniu monety unieruchomionej?

Każda kolejna cząsteczka jej brzegu zetknie się w jednym pełnym okrążeniu raz jeden tylko z odpowiednią cząstką brzegu monety nieruchomej. Wydaje się więc teoretycznie zupełnie jasne, że moneta obróci się raz jeden, tymczasem w rzeczywistości obróci się dwa razy. Łatwo się przekonać o tym za pomocą doświadczenia albo przy rozpatrywaniu takiegoż obrotu trójkąta dokoła trójkąta lub kwadratu dokoła kwadratu.

B. Równik ziemski powiększony o 10 metrów

Przypuśćmy, że dokoła globu ziemskiego biegnie wzdłuż równika olbrzymia obręcz żelazna ściśle przystająca do powierzchni Ziemi. Otóż jeśli do tej obręczy, która liczyć będzie tyleż metrów, co równik, tj. około 40 075 000 m, dodamy jeszcze 10 m, to czy przez lukę, jaka się wskutek tego między obręczą i Ziemią wytworzy, będzie mogła przecisnąć się mysz domowa?

Na zapytanie to ogromna większość osób niewątpliwie odpowie po pewnym namyśle, że prawdopodobnie tak! Natomiast niemal każdemu zupełnie nieprawdopodobne wyda się twierdzenie, że pod obręczą przejdzie nie tylko mysz, ale i kot, i pies, i koń, i nawet człowiek niewielkiego wzrostu. A jednak,... jednak łatwe do sprawdzenia obliczenie na podstawie znanego wzoru $C = 2\pi R$ przekonać musi każdego o prawdzie tego nieprawdopodobieństwa.

Niechaj R oznacza promień równika ziemskiego. Wówczas długość równika C wyrazi się wzorem $C = 2\pi R$. Ze wzoru tego możemy obliczyć promień Ziemi dzieląc C przez 2π. Otrzymamy

$$R = \frac{C}{2\pi}$$

Długość obręczy wynosi $C + 10$ m; jakiż będzie jej promień? Stosując ten sam wzór obliczymy promień

$$R' = \frac{C + 10\text{ m}}{2\pi}$$

Wzór ten można tak przekształcić:

$$R' = \frac{C}{2\pi} + \frac{10\text{ m}}{2\pi}, \text{ czyli } R' = R + \frac{10\text{ m}}{2\pi}$$

Różnica $R' - R$ jest właśnie wysokością przejścia między Ziemią a obręczą. Dzieląc 10 m przez 2π oznaczymy tę wysokość na 1,59 m.

Obręcz odpowiadać będzie okręgowi koła, jaki zatoczyłby nos człowieka, który obszedłby całą Ziemię wzdłuż równika trzymając ciągle nos na wysokości 159 cm od ziemi. Droga nosa byłaby o 10 m dłuższa niż droga stóp. Kto nie wierzy, niechaj sam się o tym przekona.

C. Ziemia i pomarańcza

Wyobraźmy sobie, że Ziemia nasza wzdłuż równika obciągnięta jest srebrnym drutem i takimże drutem obciągnięta jest pomarańcza. Przypuśćmy następnie, że do długości jednego i drugiego drutu dodaliśmy jeszcze po metrze drutu. Wówczas oba druty oczywiście odstaną — jeden od Ziemi, drugi od pomarańczy; wytworzy się więc między obręczą a powierzchniami kuli ziemskiej i pomarańczowej pewien „luz". Otóż niechaj ktoś odgadnie, w którym wypadku „luz" ten będzie większy!

Odstępy, na jakie odsuną się obie obręcze, będą zupełnie takie same!

Oznaczmy obwód równika Ziemi przez C, a obwód pomarańczy przez c. Wówczas promień kuli ziemskiej wynosić będzie

$$R = \frac{C}{2\pi},$$

a promień pomarańczy

$$r = \frac{c}{2\pi}$$

Jeśli do długości obu obręczy dodamy po metrze, to ich nowe promienie będą się równały

$$\frac{C + 1\,\text{m}}{2\pi} \quad \text{i} \quad \frac{c + 1\,\text{m}}{2\pi}$$

Gdy od nowych tych promieni odejmiemy pierwotne, wówczas otrzymamy:

dla Ziemi $$\frac{C + 1\,\text{m}}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{1\,\text{m}}{2\pi}$$

i dla pomarańczy $$\frac{c + 1\,\text{m}}{2\pi} - \frac{c}{2\pi} = \frac{1\,\text{m}}{2\pi}$$



V

ODGADNIENIA

UWAGI OGÓLNE

Była to najulubieńsza rozrywka matematyczna w XVII i XVIII wieku. Zdolność odgadywania pomyślanej liczby, rezultatu pewnych kombinacyj arytmetycznych, uważano wówczas za przejaw omal że nie czarnoksięstwa.

Obecnie wiemy, iż odgadnienia te opierają się zazwyczaj na bardzo prostych właściwościach pewnych liczb i działań matematycznych, o których mówiliśmy w rozdziale II. Niemniej jednak i obecnie popisy takie są doskonałą rozrywką towarzyską, wywołującą szczery podziw i ogólne zainteresowanie.

I w tym rozdziale, jak w poprzednich, jest kłopot prawdziwy z nadmiarem materiału. I tu też dokonać trzeba będzie pewnej selekcji, odkładając trudniejsze nieco odgadnienia do drugiej części niniejszego dzieła.

Gwoli jak największej zwięzłości, która umożliwia przytoczenie znaczniejszej liczby różnych odmian, zamiast zwykłych opisów podamy odgadnienia te w formie lakonicznych poleceń, jakie zwykł dawać odgadujący, następnie zaś poprzemy je krótkim przykładem lub formułą algebraiczną uzasadniającą ich punkt wyjścia.

Zanim jednak przystąpimy do rzeczy — jeszcze jedna krótka uwaga. Wiadomo, jak często, zwłaszcza z ust niewieścich, słyszeć można wyrażenia: „to jest mniejsza połowa", „to jest większa połowa". Przeróżni rygoryści logiczni oraz matematyczni, wyszydzają ów zwyczaj lub karcą. A tymczasem wyrażenia te nie są ani tak bardzo nielogiczne, ani antymatematyczne, jak się to wielu wydaje. I z pojęciami tymi musimy się tu nie tylko pogodzić, ale nauczyć się je stosować, gdyż niektóre odgadnienia muszą się oprzeć na tych właśnie trzebionych określeniach. Otóż umówimy się, że *mniejszą połową* liczby nieparzystej nazywamy jej część o 1 mniejszą od pozostałej części, czyli od *większej połowy* tejże liczby; na przykład 3 będzie mniejszą, a 4 większą połową liczby 7.

1. Odgadywanie cyfry wymazanej

1. Napisz — lub jeśli możesz pamięciowo wykonywać proste działania arytmetyczne — pomyśl sobie dowolną liczbę. Dopisz do niej 0, odejmij liczbę pomyślaną, dodaj 117, z otrzymanej liczby jedną cyfrę wymaż, ale nie wymazuj zera; resztę mi powiedz, a ja ci powiem natychmiast, jaką cyfrę wymazałeś.

Na przykład partner oblicza:

518, 5180, $5180 - 518 = 4662$, $4662 + 117 = 4779$, 4*79.

Odgadującemu podano cyfry: 4, 7, 9. Suma ich wynosi 20. Odgadnienie polega na szybkim obliczeniu, że najbliższą wyższą od sumy danych cyfr wielokrotnością liczby 9 będzie 27; wymazane więc zostało 7.

Rzecz oczywista, że zamiast 117 można kazać dodać każdą inną wielokrotność liczby 9.

2. Pomyśl dowolną liczbę, weź sumę jej cyfr, odejmij ją od liczby pomyślanej, w otrzymanym rezultacie poprzestawiaj cyfry jak ci się żywnie podoba, dodaj do tak utworzonej nowej liczby 23, usuń jedną z cyfr mniejszą od 9, podaj mi sumę pozostałych, a ja ci wnet powiem, jaką cyfrę usunąłeś.

Na przykład partner oblicza:

8789, $8 + 7 + 8 + 9 = 32$, $8789 - 32 = 8757$,
7785, $7785 + 23 = 7808$, 7*08, $7 + 8 = 15$.

Odgadującemu podano liczbę 15. Od podanej sumy odejmujemy 5; zostaje 10. Najbliższą wyższą liczbą podzielną przez 9 jest 18, a ponieważ $18 - 10 = 8$, więc usunięto cyfrę 8.

Sposób ten nie daje odpowiedzi jednoznacznej, jeśli wymazaną cyfrą jest 0 lub 9; skoro jednak zakazaliśmy wymazywanie dziewiątki, to zadanie ma zawsze jednoznaczne odgadnienie.

Jeżeli od jakiejkolwiek liczby odejmiemy sumę cyfr tej liczby, to w wyniku odejmowania otrzymamy liczbę, której suma cyfr jest podzielna przez 9. Od sumy pozostałych cyfr odejmuje się 5 dlatego, że liczba, którą się dodaje — w tym przypadku 23 — daje przy dzieleniu przez 9 resztę 5. Można jednak zamiast 23 kazać dodać jakąkolwiek inną liczbę, której reszta przy dzieleniu przez 9 jest odgadującemu wiadoma.

Gdyby zamiast 8 usunięto 0, zostałoby 78*8. Suma pozostałych cyfr: $7 + 8 + 8 = 23$. Odgadujący odejmuje: $23 - 5 = 18$. Liczba 18 dzieli się przez 9, cyfra więc usunięta mogła być albo 9, albo 0. Zastrzeżone jednak było, że cyfry 9 nie można usuwać, usunięto więc 0.



3. Napisz dowolną liczbę, sumę jej cyfr pomnóż przez 80 i dodaj do wypisanej liczby; po usunięciu jednej cyfry, nie wyższej niż 8, wymień mi pozostałe cyfry, ja zaś wymienię cyfrę usuniętą.

Na przykład:

435, $4 + 3 + 5 = 12$, $80 \cdot 12 = 960$,
$435 + 960 = 1395$, 1*95.

Odgadnienie: $1 + 9 + 5 = 15$. Najbliższą liczbą podzielną przez 9 jest 18; $18 - 15 = 3$, usunięto więc 3.

Zamiast zastrzeżenia, by nie usuwać 9, można się zastrzec przed usunięciem cyfry 0.

4. Napisz liczbę czterocyfrową, poprzestawiaj cyfry dowolnie, abyś otrzymał nową liczbę, różnicę między tymi dwiema liczbami pomnóż przez 67, usuń cyfrę, którą chcesz, byle nie 0 i wymień pozostałe.

Na przykład:

3416, 6413, $6413 - 3416 = 2997$,
$67 \cdot 2997 = 200799$, 2007*9.

Odgadnienie: $2 + 7 + 9 = 18$. Jest to wielokrotność liczby 9, a skoro nie mogło być usunięte 0, więc było usunięte 9.

Zamiast 67 można wziąć w tym typie odgadnień inną liczbę — bez żadnych zastrzeżeń.

5. Obierz jakąkolwiek liczbę całkowitą i pomnóż ją przez liczbę bezpośrednio za nią idącą, a otrzymany iloczyn pomnóż przez sumę obu liczb; ten drugi iloczyn podnieś do kwadratu; gdy mi wymienisz wszystkie cyfry ostatecznego rezultatu, prócz jednej, powiem ci, jaką cyfrę obrałeś.

Na przykład:

$10 \cdot 11 = 110$, $110 \cdot (10 + 11) = 2310$,
$2310^2 = 5336100$, 35*6100.

Odgadnienie opiera się na tym, że budowany przez nas iloczyn $n(n + 1)(2n + 1)$ jest zawsze podzielny przez 3 (nawet przez 6), a kwadrat jego dzieli się przez 9. Sztuka polega więc na odszukaniu najbliższej wielokrotności 9 i odjęciu od niej sumy cyfr wymienionych.

Jeśli się nie zastrzegło nieusuwania 0 albo 9, można uwzględnić to w odpowiedzi i znalazłszy, że suma pozostałych cyfr dzieli się przez 9, dać odpowiedź, że usunięto 0 albo 9.



6. Z wybranej przez siebie liczby uformuj przez przestawienie cyfr dwie inne, znajdź sumę tych trzech liczb i podnieś ją do kwadratu, a potem pytaj mnie o usuniętą liczbę, wymieniając pozostałe.

Na przykład:

$$215, \ 152, \ 512, \ 215 + 152 + 512 = 879, \ 879^2 = 772641, \ 7*2641.$$

Odgadnienie zupełnie podobne do poprzedniego.

7. Trzy bezpośrednio po sobie następujące liczby przemnóż, iloczyn podnieś do kwadratu, a odgadnę cyfrę, którą zataisz, gdy mi wymienisz sumę cyfr pozostałych.

Na przykład:

$$11, \ 12, \ 13, \ 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716, \ 1716^2 = 2944656, \ 29*4656.$$

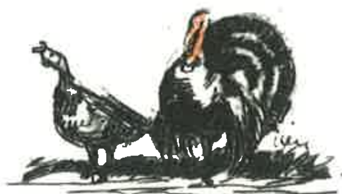
Odgadnienie opiera się na tym, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych zawsze dzieli się przez 3, a więc kwadrat tej sumy dzieli się przez 9.

8. Wybierz trzy liczby sąsiednie w naturalnym ciągu liczb, podnieś je wszystkie do sześcianu, dodaj i powiedz mi sumę cyfr tej sumy bez jednej cyfry, a ja wymienię ci zaraz tę cyfrę.

Na przykład:

$$5, \ 6, \ 7, \ 5^3 + 6^3 + 7^3 = 684, \ 68*.$$

Odgadnienie opiera się na tym, że suma trzech kolejnych sześcianów zawsze dzieli się przez 9.



9. Wybierz sobie liczbę z trzech różnych cyfr, ułóż cyfry w odwrotnym porządku, aby otrzymać liczbę odwróconą; znajdź różnicę pomiędzy tymi dwiema liczbami, powiedz mi z tej różnicy tylko pierwszą cyfrę, a ja ci powiem od razu następne.

Na przykład:

$$527, \ 725, \ 725 - 527 = 198, \ 1**.$$

Odgadnienie. Drugą cyfrą jest, jak to wiemy z rozdziału II, zawsze 9, trzecia jest dopełnieniem pierwszej do 9. Skoro więc wymieniona zostanie, jak w tym przykładzie, cyfra 1, można od razu odpowiedzieć, że pozostałymi cyframi są 9 i 8.

Wszystkie powyższe odmiany odgadnień oparte są, jak to widać z pierwszego niemal rzutu oka, na różnych szczególnych właściwościach dziewiątki. Odgadnienia, którym za podstawę służą 11, 99 lub 101, znajdą się w drugim tomie rozrywek.

2. Odgadywanie rezultatu działań na liczbach nieznanych

1. Weź dowolną liczbę, byle to była liczba nieparzysta i niepodzielna przez 3; podnieś ją do kwadratu, dodaj 17, podziel przez 12, a ja z góry przepowiem ci, jaką otrzymasz resztę w dzieleniu. Mianowicie: 6.

Przykład:

$$11, \ 11^2 = 121, \ 121 + 17 = 138, \ 138 = 11 \cdot 12 + 6.$$

2. Do liczby dowolnie wybranej dodaj 11, sumę pomnóż przez 2, od iloczynu odejmij 20, to, co wypadnie, pomnóż przez 5, od iloczynu odejmij 10 razy wziętą liczbę, którą wybrałeś, a powiem ci, że w rezultacie ostatecznym otrzymasz 10.

Przykład:

$$23, \ 23 + 11 = 34, \ 2 \cdot 34 = 68, \ 68 - 20 = 48, \ 5 \cdot 48 = 240,$$
$$240 - 230 = 10.$$

Algebraiczna formuła tak się przedstawia:

$$5 \cdot [2(n + 11) - 20] - 10n = 10.$$

3. Wybierz liczbę złożoną z trzech takich cyfr, żeby cyfry pierwsza i ostatnia różniły się więcej niż o 1; napisz liczbę odwróconą, odejmij jedną od drugiej, znów napisz liczbę odwróconą względem otrzymanej różnicy, dodaj obie liczby ostatnie, a otrzymasz zawsze 1089.

Przykład:

$$326, \ 623, \ 623 - 326 = 297, \ 297 + 792 = 1089.$$

4. Dowolną liczbę pomnóż przez 37, do iloczynu dodaj 17, sumę pomnóż przez 27, dodaj jeszcze 7, podziel ostateczny rezultat przez 999, a otrzymasz zawsze resztę 466.

Przykład:

$$3, \ 3 \cdot 37 = 111, \ 111 + 17 = 128, \ 128 \cdot 27 = 3456,$$
$$3456 + 7 = 3463, \ 3463 : 999 = 3 \cdot 999 + 466.$$

Zamiast liczb 17 i 7 można wziąć inne, ogólnie a i b, tak jednak, by $27a + b < 999$. Wówczas przy niewiadomym n otrzymamy

$$27(37n + a) + b = 999n + (27a + b)$$

i przy dzieleniu przez 999 zostanie reszta $27a + b$, którą z góry można obliczyć.





5. Liczbę, jaka ci pierwsza na myśl przyjdzie, pomnóż przez 18, dodaj do iloczynu 291, sumę podziel przez 3, od ilorazu odejmij 6 razy wziętą liczbę pierwotnie pomyślaną; liczbę, którą otrzymasz, pomnóż przez bezpośrednio od niej wyższą, a zapowiedzieć ci mogę, że jeśli się nie omyliłeś, musisz otrzymać w rezultacie ostatecznym 9506.

Przykład:

$$13, \quad 18 \cdot 13 = 234, \quad 234 + 291 = 525, \quad 525 : 3 = 175,$$
$$175 - 6 \cdot 13 = 97, \quad 97 \cdot 98 = 9506.$$

Nie zawadzi dodać, że zarówno przy tym punkcie, jak i przy wszystkich poprzednich i następnych, w których działania rozpoczyna się z zupełnie dowolnymi liczbami, można — w celu utrudnienia obecnym zorientowania się, na jakiej podstawie oparte jest dane odgadnienie — polecić z początku dokonać najróżniejszych działań z liczbą wybraną, a dopiero po pewnej serii takich kombinacyj nadprogramowych przystąpić — bez zwrócenia uwagi — do właściwego rozwiązywania.

6. Wybierz dwie liczby trzycyfrowe, napisz mniejszą z nich tuż poza większą, następnie przeciwnie: na pierwszym miejscu napisz mniejszą, a za nią większą. Otrzymasz tym sposobem dwie liczby sześciocyfrowe. Odejmij drugą od pierwszej, otrzymany rezultat podziel przez różnicę pomiędzy wybranymi przez ciebie liczbami, a zapewniam cię, że podzielić się da bez reszty, w ilorazie zaś wypadnie 999. Oto przykład:

$$873, \quad 451, \quad 873451 - 451873 = 421578, \quad 873 - 451 = 422,$$
$$421578 : 422 = 999.$$

7. Wybierz trzy cyfry, ułóż z nich sześć różnych liczb dwucyfrowych, weź sumę tych liczb i podziel przez sumę obranych na początku cyfr. Gdy wykonasz działanie, zapytaj mnie o rezultat, a powiem ci: 22. Oto przykład:

$$3, \ 4, \ 8; \quad 34, \ 38, \ 43, \ 83, \ 48, \ 84;$$
$$34 + 38 + 43 + 83 + 48 + 84 = 330,$$
$$3 + 4 + 8 = 15, \quad 330 : 15 = 22.$$

8. Napisz dowolną liczbę czterocyfrową, odczytaj mi ją, podpisz liczbę, którą ci podyktuję, poniżej tej znów podpiszesz inną, obraną przez siebie; potem ja z kolei podam ci liczbę mego pomysłu, a wreszcie ty wypiszesz piątą liczbę. Zanim jednak zdążysz ją napisać, gdy tylko mi ją wymienisz, natychmiast podyktuję ci sumę wszystkich pięciu liczb.

Odgadnienie polega na tym, by do dwóch pierwszych liczb podyktować dwie, stanowiące ich dopełnienia do 9999; wówczas suma wszystkich pięciu liczb będzie się równać liczbie piątej, zmniejszonej o 2 jedności i dopełnionej dwójką na miejscu dziesiątek tysięcy. Oto przykład:

$$\begin{array}{l} 3854 \\ 6145, \text{ gdyż } 9999 - 3854 = 6145 \\ 2791 \\ 7208, \text{ gdyż } 9999 - 2791 = 7208 \\ \underline{5739} \\ 25737, \text{ czyli } 5739 - 2 + 20000 \end{array}$$

9. Weź liczbę dowolną i rób z nią w zakresie czterech działań, co ci się podoba, wymieniając mi tylko kolejno, jakie działanie przeprowadzasz i z jakimi dobranymi liczbami, to znaczy, przez ile mnożysz lub dzielisz, ile dodajesz lub odejmujesz. Gdy ci się to uprzykrzy, ja polecę ci wykonać jeszcze dwa działania i powiem ci z góry, jaki otrzymasz rezultat.

Odgadnienie sprowadza się do tego, żeby za pomocą ostatniego wskazanego przez odgadującego działania wyeliminować, usunąć liczbę na początku obraną, a odgadującemu nieznaną.

Przypuśćmy dla przykładu, że ktoś obiera sobie liczbę 25, której zgadującemu oczywiście nie wyjawia, lecz mówi: „Do liczby przeze mnie obranej dodaję 15, sumę mnożę przez 4, odejmuję 7 i dzielę przez 9". To znaczy:

$$25 + 15 = 40, \quad 4 \cdot 40 = 160, \quad 160 - 7 = 153, \quad 153 : 9 = 17.$$

Odgadujący — pod pozorem, iż notuje sobie liczby i przeprowadzone działania — wypisuje ich wyniki w postaci algebraicznej, oznaczając nieznaną mu liczbę przez x:

$$x, \quad x + 15, \quad 4x + 60, \quad 4x + 53, \quad \frac{4x + 53}{9}$$

Aby z wyniku wyłączyć x, należy polecić: Pomnóż wynik przez 9 i odejmij czterokrotną liczbę, którą sobie obrałeś, a powiem ci, że otrzymasz w rezultacie ostatecznym 53.

I tak jest istotnie: W wyniku wykonanych działań partner otrzymał 17; gdy na polecenie odgadującego pomnoży tę liczbę przez 9, otrzyma 153, a gdy wreszcie odejmie czterokrotną liczbę pomyślaną, czyli 100, otrzyma 53.



3. Odgadywanie liczby pomyślanej

Przy tym typie odgadnień szczególnie pożądane jest — tam tylko oczywiście, gdzie się ma do czynienia z liczbą zupełnie dowolną — polecenie przeprowadzenia różnych działań nadprogramowych, zanim się przystąpi do właściwego toku odgadnienia. Inaczej bowiem zbyt proste kombinacje mogą być przez bieglejszych słuchaczy łatwo zdemaskowane.

1. Weź połowę pomyślanej liczby (jeśli wybrałeś liczbę nieparzystą, weź jej mniejszą połowę), dodaj 1, sumę pomnóż przez 4, odejmij pomyślaną liczbę i powiedz mi, ile wynosi różnica, a powiem ci liczbę, którą obrałeś.

Odgadnienie: Jeżeli w wyniku została podana liczba parzysta, to pomyślana liczba pierwotna była od niej o 4 mniejsza, a jeżeli podano w wyniku liczbę nieparzystą, to pomyślana liczba była od tej liczby o 2 mniejsza.

Przykłady:

a) 22, $22 : 2 = 11$, $11 + 1 = 12$, $4 \cdot 12 = 48$, $48 - 22 = 26$.

Odgadnienie: Liczba 26 jest parzysta; odejmując od niej 4 otrzymujemy 22.

b) 23, $(23 - 1) : 2 = 11$, $11 + 1 = 12$, $4 \cdot 12 = 48$, $48 - 23 = 25$.

Odgadnienie: Liczba 25 jest nieparzysta; odejmując od niej 2 otrzymujemy 23.

2. Liczbę, jaką sobie obierzesz, pomnóż przez 3, do iloczynu dodaj 1, sumę pomnóż znów przez 3, wreszcie do rezultatu, jaki otrzymasz, dodaj liczbę pierwotnie obraną. Powiedz, ile wypadło z tych wszystkich działań, a ja od razu powiem ci, co za liczbę obrałeś.

Odgadnienie polega na odrzuceniu końcowej cyfry 3 od liczby wypowiedzianej; pozostała liczba dziesiątek będzie liczbą przez odgadującego poszukiwaną.

Przykład:

13, $3 \cdot 13 = 39$, $39 + 1 = 40$, $3 \cdot 40 = 120$, $120 + 13 = 133$.

Odrzuciwszy 3 otrzymamy 13.

3. Liczbę niezbyt wielką podnieś do kwadratu, potem liczbę o 1 większą od pierwszej również podnieś do kwadratu i powiedz mi tylko różnicę tych dwu drugich potęg, jeśli chcesz, bym wiedział, jaką liczbę obrałeś.

Odgadnienie opiera się na znanej właściwości różnicy kwadratów dwóch liczb kolejnych w ciągu naturalnym: różnica ta równa się mianowicie podwojonej mniejszej liczbie plus 1. A więc dowiedziawszy się, jaki jest rezultat działań, należy wziąć mniejszą jego połowę — będzie ona liczbą wybraną.

Przykład: 17, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, $324 - 289 = 35$.

Mniejszą połową liczby 35 jest 17.

4. Pomyśl sobie jakąkolwiek liczbę, najlepiej — choć niekoniecznie — jednocyfrową; pomnóż ją przez 5, dodaj 2, pomnóż przez 4, dodaj 3, pomnóż przez 5, dodaj 7. Ledwie zdążysz wymienić rezultat otrzymany, już ci powiem, od jakiej liczby rozpocząłeś.

Odgadnienie polega na odrzuceniu ostatnich dwóch cyfr otrzymanego rezultatu. Na przykład:

7, 35, 37, 148, 151, 755, 762.

Od liczby 762 należy odrzucić dwie ostatnie cyfry, pozostanie 7.

5. Liczbę niezbyt wielką, a w każdym razie mniejszą od 996, pomnóż przez 37, dodaj 111, pomnóż przez 27, a co otrzymasz, dopełnij do okrągłych tysięcy. Z otrzymanego przez ciebie rezultatu wyczytam, jaką liczbę wziąłeś.

Odgadnienie następuje przez odjęcie 3 od liczby tysięcy.

Przykład:

14, 518, 629, 16 983, 17 000.

Odjąwszy 3 od liczby tysięcy, tj. od 17, otrzymamy 14.

6. Przytoczone przez E. Fourreya w jego *Récréations arithmétiques* odgadnienie poniższe grzeszy pozornie pewną zawiłością, po bliższym jednak rozpatrzeniu się w nim łatwo się do niego przekonać: nie jest zbyt skomplikowane, a jest niewątpliwie ciekawe.

(a) Do liczby pomyślanej — dla ułatwienia procedury najlepiej weź dwucyfrową lub trzycyfrową — dodaj jej połowę albo większą połowę, do otrzymanej sumy dodaj połowę tej sumy lub większą jej połowę, od tej zaś drugiej sumy odejmij dwukrotnie wziętą liczbę pierwotnie pomyślaną.

(b) Znajdź połowę otrzymanej różnicy lub mniejszą jej połowę, weź znów połowę tej połowy lub mniejszą jej połowę, aż dojdziesz do 1.

Powiedz mi, ile razy przy stosowaniu przepisów punktu (b) i w jakim porządku brałeś kolejno ścisłą połowę i połowę mniejszą. Potem powiedz mi, kiedy i ile razy brałeś większą połowę stosując się do wskazówek punktu (a).

Po niedługiej chwili odpowiem ci, jaką liczbę wybrałeś.

Odgadnienie rozpocząć należy od punktu (b). Wiedząc, że ostatecznie przy podziale wypadło 1, trzeba — w zależności od tego, czy brano ścisłą połowę, czy mniejszą połowę — bądź podwajać, bądź podwajać i dodawać 1, a działania te należy powtórzyć tyle razy, ile razy wykonane zostało dzielenie.

Otrzymany w ten sposób ostateczny rezultat działań przepisanych w punkcie (a), pomnożony przez 4 będzie już ową poszukiwaną liczbą, jeżeli w punkcie (a) brano ścisłe połowy; jeśli wzięto większą połowę przy pierwszym dzieleniu, to odjąć należy od iloczynu 3, jeśli przy drugim dzieleniu, to 2, a jeśli przy obu dzieleniach, to 5.

Przykład:

(a) $32, \; \frac{32}{2} = 16, \; 32 + 16 = 48, \; \frac{48}{2} = 24,$

$48 + 24 = 72, \; 72 - 2 \cdot 32 = 8,$

(b) $\frac{8}{2} = 4, \frac{4}{2} = 2, \frac{2}{2} = 1.$

W punkcie (b) wykonano dzielenie trzykrotnie, zawsze biorąc ścisłą połowę; łatwo stąd obliczyć, że rozpoczęto od 8.

W punkcie (a) oba dzielenia dały również ścisłe połowy, należy tedy wziąć $4 \cdot 8 = 32$ — i to jest liczba początkowa.

Dla jasności przytoczymy tu jeszcze drugi przykład, już tylko w pewnym skróceniu:

(a) $33, \; 17, \; 33 + 17 = 50, \; 50 + 25 = 75, \; 75 - 66 = 9,$

(b) $9, \; 4, \; 2, \; 1.$

W punkcie (b) wzięto raz jeden mniejszą połowę i dwa razy ścisłą połowę.

W punkcie (a) wzięto większą połowę przy pierwszym dzieleniu: należy więc od $4 \cdot 9$ odjąć 3; $36 - 3 = 33$.



4. Odgadywanie kilku liczb

1. Wybierz trzy liczby — dla uproszczenia sprawy — jak „najskromniejsze". Pomnóż pierwszą liczbę przez 2, drugą przez 3, trzecią przez 5. Zsumuj ostatnie dwa iloczyny, odejmij pierwszy i powiedz mi, ile ci wypadło. Zsumuj iloczyny trzeci i pierwszy, odejmij drugi i znów powiedz mi rezultat. Wreszcie zsumuj pierwsze dwa iloczyny i odejmij trzeci. Gdy dowiem się, jaką i tym razem otrzymałeś różnicę, będę ci mógł wymienić obrane przez ciebie trzy liczby.

Odgadnienie to podaje P. Delens w swych *Problèmes d'arithmétique amusante* i takie przytacza prawidło ogólne:

Niechaj x, y, z oznaczają trzy obrane liczby, a, b, c — mnożniki podane przez odgadującego (więc, jak w tym przypadku: $a = 2, \; b = 3, \; c = 5$). Wówczas

$$\begin{cases} by + cz - ax = \alpha \\ cz + ax - by = \beta \\ ax + by - cz = \gamma \end{cases}$$

Sumując kolejno po dwa równania, otrzymamy:

$$2ax = \beta + \gamma, \text{ czyli } x = \frac{\beta + \gamma}{2a}$$

$$2by = \gamma + \alpha, \quad ,, \quad y = \frac{\gamma + \alpha}{2b}$$

$$2cz = \alpha + \beta, \quad ,, \quad z = \frac{\alpha + \beta}{2c}$$

Na przykład $x = 4, \; y = 7, \; z = 8$:

$$3 \cdot 7 + 5 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 53 \qquad x = \frac{27 - 11}{2 \cdot 2} = 4$$

$$5 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 27 \qquad y = \frac{53 - 11}{2 \cdot 3} = 7$$

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = -11 \qquad z = \frac{53 + 27}{2 \cdot 5} = 8$$

2. Wybierz sobie jedną liczbę trzycyfrową i trzy liczby jednocyfrowe. Pomnóż pierwszą liczbę przez 2, dodaj 1, sumę pomnóż przez 5 i dodaj drugą liczbę. Sumę znów podwój, powiększ o 1, pomnóż przez 5 i dodaj trzecią liczbę. Z rezultatem otrzymanym jeszcze raz powtórz te same działania i dodaj czwartą liczbę. Gdy to ukończysz, powiedz mi rezultat ostateczny, a ja ci wymienię momentalnie wszystkie cztery liczby.

Odgadnienie jest niezwykle łatwe: od podanego rezultatu należy odjąć 555 i odczytać kolejno naprzód liczbę trzycyfrową, potem trzy jednocyfrowe. Oto przykład:

$$234, \; 7, \; 8, \; 3, \; 469, \; 2352, \; 4705, \; 23533, \; 47067, \; 235338,$$
$$235338 - 555 = 234783.$$

Dla tych, którzy pragnęliby to interesujące odgadnienie uogólnić i zamiast czterech liczb wziąć więcej lub zamiast pierwszej liczby trzycyfrowej wziąć wielocyfrową, przytaczamy tu dokładny tok działań powyższego przykładu:

$$\begin{array}{l}
234 \\
2 \cdot 234 + 1 \\
10 \cdot 234 + 5 + 7 \\
20 \cdot 234 + 10 + 2 \cdot 7 + 1 \\
100 \cdot 234 + 50 + 10 \cdot 7 + 5 + 8 \\
200 \cdot 234 + 100 + 20 \cdot 7 + 10 + 2 \cdot 8 + 1 \\
1000 \cdot 234 + 500 + 100 \cdot 7 + 50 + 10 \cdot 8 + 5 + 3 = 235338
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
235338 \\
-\;\;555 \\
\hline
234783
\end{array}$$

5. Czarodziejskie tablice

Jest to sposób odgadywania niewątpliwie mniej od poprzednich imponujący, ale ciekawy i niezmiernie łatwy, a przy zręcznym przeprowadzeniu może wywołać efekt zgoła niepośledni.

16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31



Przytoczone obok kolumny liczb można wypisać na tablicach kartonowych albo na wachlarzu. Będziemy wówczas operowali „czarodziejskim wachlarzem". Odgadnienie jest bardzo efektowne, jeśli zapamiętawszy kolejność kolumn odgadujący da niezwłoczną odpowiedź, nie patrząc na tabliczki. Wystarczyć mu powinno, gdy ktoś wymieni, w których — licząc od lewej strony — kolumnach znajduje się obrana przezeń liczba.

Sekret polega na tym, iż odgadujący musi momentalnie zsumować górne liczby podstawowe wymienionych kolumn.

Gdy ktoś na przykład powie, że upatrzona przezeń liczba znajduje się w kolumnie pierwszej i ostatniej, odgadujący powinien natychmiast wymienić 17; gdy w pierwszych czterech — 30, w trzech środkowych — 14 i tak dalej.

Sposób zestawienia takich tablic łatwo każdy Czytelnik rozwiąże sam na podstawie podanych tu tablic i — jeśli zechce — może ilość kolumn powiększyć do 6, wziąwszy jako liczby podstawowe układ liczb 32, 16, 8, 4, 2, 1, przy czym wtedy największą liczbą u dołu wszystkich kolumn będzie oczywiście $63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$; przy siedmiu kolumnach do szeregu liczb podstawowych dojdzie 64, przy ośmiu — 128 i tak dalej.

Nieco bardziej skomplikowane są tablice poniższe o podwójnej numeracji: arabskiej i rzymskiej. Można je również ułożyć z trzech kolumn zamiast pięciu — w kształcie bardziej wydłużonym.

14	15	16	17	18
19	20	21	22	23
24	25	26	27	28
29	30	31	32	33
34	35	36	37	38
39	40			

Tablica I

5	6	7	8	9
10	11	12	13	32
33	34	35	36	37
38	39	40		
	XIV	XV	XVI	XVII
XVIII	XIX	XX	XXI	XXII

Tablica II

2	3	4	11	12
13	20	21	22	29
30	31	38	39	40
			V	VI
VII	XIV	XV	XVI	XXIII
XXIV	XXV	XXXII	XXXIII	XXXIV

Tablica III

1	4	7	10	13
16	19	22	25	27
31	34	37	40	
		II		VIII
XI	XIV	XVII	XX	XXIII
XXVI	XXIX	XXXII	XXXV	XXXVIII

Tablica IV

Liczby podstawowe, którymi operuje odgadujący, nie są i nie powinny być na tablicach tych widoczne. Jest to zresztą zupełnie zbyteczne, gdyż zapamiętać je jest ogromnie łatwo:

dla tablicy I . . . 27
,, ,, II . . . 9
,, ,, III . . . 3
,, ,, IV . . . 1

Należy polecić, by obraną liczbę, nie większą od 40, odszukano naprzód w tablicy I, potem kolejno w tablicach II, III i IV, wymieniając, czy liczba ta napisana jest cyframi arabskimi, czy też rzymskimi. Kolejność oraz podanie rodzaju cyfr są konieczne, gdyż jeżeli liczba wybrana napisana jest cyframi arabskimi, to podstawową liczbę tablicy dodaje się, jeśli zaś rzymskimi, to wówczas liczbę podstawową należy odjąć.



Przypuśćmy na przykład, iż ktoś oświadcza, że wybrana przezeń liczba znajduje się w tablicy I w cyfrach arabskich, w tablicy IV zaś w cyfrach rzymskich. Wówczas odgadujący momentalnie odejmuje 27 — 1 i odpowiada: 26. Jeżeli zaś liczba znajduje się w tablicy I w cyfrach arabskich, w tablicach II i III w cyfrach rzymskich, a w tablicy IV — w arabskich, to bierzemy $27 - 9 - 3 + 1 = 16$.

Inny sposób odgadywania zastosować można przy użyciu dwudziestu ruchomych kolumn liczbowych. Wypisuje się w tym celu na kartonie dwie tablice z liczbami od 1 do 100. Następnie rozcina się je na dwadzieścia pionowych kolumn.

Odgadujący poleca obrać liczbę dowolną i spośród dwudziestu pasków, które wręcza, zatrzymać te, na których znajduje się obrana liczba, pozostałe paski (w liczbie 18) bierze z powrotem. Następnie powinien szybko się zorientować, których pasków brak, i niezwłocznie przytoczyć obraną liczbę biorąc dziesiątki z nie zwróconej mu kolumny tablicy II, jedności zaś z zatrzymanej kolumny tablicy I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	32	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tablica I

91	81	71	61	51	41	31	21	11	1
92	82	72	62	52	42	32	22	12	2
93	83	73	63	53	43	33	23	13	3
94	84	74	64	54	44	34	24	14	4
95	85	75	65	55	45	35	25	15	5
96	86	76	66	56	46	36	26	16	6
97	87	77	67	57	47	37	27	17	7
98	88	78	68	58	48	38	28	18	8
99	89	79	69	59	49	39	29	19	9
100	90	80	70	60	50	40	30	20	10

Tablica II

Na przykład ktoś obrał sobie liczbę 37. Liczba ta, jak i każda inna, znajduje się na dwóch paskach, mianowicie na takim, który ma w swej górnej przedziałce liczbę 31, i takim, który ma u góry liczbę 7. Skoro tylko odgadujący rozpatrzywszy zwrócone mu 18 pasków spostrzeże brak pasków z naczelnymi liczbami 31 i 7, momentalnie zapewnić może, iż liczbą obraną jest 37.



Na podobnej zasadzie formuje swe tabliczki P. Delens, ale nie za pomocą dziesięciu, tylko siedmiu liczb w każdej kolumnie, co oczywiście utrudnia odkrycie sposobu ich budowy.

0	7	14	21	28	35	42
1	8	15	22	29	36	43
2	9	16	23	30	37	44
3	10	17	24	31	38	45
4	11	18	25	32	39	46
5	12	19	26	33	40	47
6	13	20	27	34	41	48
0	1	2	3	4	5	6

Seria I

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48

Seria II

Są tu również dwie serie, lecz ogółem tabliczek jest czternaście. Odgadnienie polega na pomnożeniu liczby stojącej u dołu wskazanej tabliczki z serii I przez 7 i dodaniu liczby stojącej u góry tabliczki wskazanej z serii II. Oto przykład:

Ktoś obrał sobie liczbę 37, wskazuje więc z serii I tabliczkę oznaczoną u spodu liczbą 5 i z serii II tabliczkę, na której czele stoi liczba 2. Odgadujący oblicza:

$$7 \cdot 5 + 2 = 37.$$

Nie potrzeba chyba nadmieniać, iż tabliczki mogą być ułożone w zupełnie dowolnym porządku, zmieszane bez zachowania odrębności seryj, gdyż określenie, do jakiej serii należą, nie przedstawia żadnej trudności.





Ostatnia z czarodziejskich tablic, jaką tu podajemy, udziela mocy odgadnięcia dwóch liczb na raz.

0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132
1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133
2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	122	134
3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	123	135
4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	124	136
5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	125	137
6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	126	138
7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	127	139
8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	128	140
9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	129	141
10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	130	142
11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	131	143
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Proponuje się komuś, by obrał sobie dwie liczby nie większe od 11. Jedną z nich niech pomnoży przez 4, doda następnie 1, sumę pomnoży przez 3, doda drugą liczbę i poda otrzymany rezultat.

Od liczby wymienionej odgadujący odejmuje 3 i odszukawszy różnicę w tabliczce niezwłocznie wymienia obie obrane liczby, które znajdują się: jedna u spodu danej kolumny, a druga na lewym skraju rzędu, w którym mieści się odszukana różnica.

Przypuśćmy na przykład, że ktoś obrał sobie liczby 7 i 11. Wszystkie wskazane mu działania potoczyć się mogą jednym z dwóch torów:

$$3 \cdot (4 \cdot 7 + 1) + 11 = 98$$

albo

$$3 \cdot (4 \cdot 11 + 1) + 7 = 142$$

Otrzymawszy jedną z tych liczb odgadujący odejmuje od niej 3, odszukuje natychmiast na tablicy 95 lub 139 i podaje liczby pomyślane: 7 i 11.

Można nawet tabliczkę dać do ręki i prosić, by wskazano, jaki rezultat wypadł z przeprowadzenia zaleconych działań, a cofnąwszy się szybko w górę o trzy liczby odszukać odgadnienie.

6. Odgadywanie parzystości i nieparzystości liczby posiadanych przez kogoś przedmiotów

Weź do jednej ręki dowolną parzystą, do drugiej nieparzystą ilość zapałek (orzechów, monet). Pomnóż liczbę zapałek w prawej ręce przez dowolną liczbę nieparzystą, w lewej — przez dowolną liczbę parzystą. Zsumuj otrzymane iloczyny i powiedz mi wynik, a ja ci zaraz powiem, w której ręce masz parzystą, a w której nieparzystą ilość zapałek.

Jeśli wymieniono liczbę parzystą, to w prawej ręce będzie parzysta liczba, a w lewej nieparzysta; odwrotnie będzie, gdy wymieniona zostanie liczba nieparzysta. Oto przykłady:

A. Prawa ręka 4, lewa 3; $7 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 46$
B. Prawa ręka 5, lewa 2; $7 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 47$



Jeszcze efektowniejsza jest druga odmiana tego odgadnienia. Należy prosić, by wzięto do jednej ręki 4, do drugiej 7 zapałek, następnie, by zawartość ręki prawej podwojono, a ręki lewej potrojono, i wreszcie — by od sumy otrzymanych iloczynów odjęto 27.

Jeśli odejmowanie okaże się niemożliwe, to liczba parzysta znajduje się w lewej ręce; jeśli jest możliwe, to przeciwnie — w prawej.

Aby — wobec protestu, że 27 nie da się odjąć od otrzymanej sumy — „zmylić ślady", można, nie dając poznać po sobie, że się już właściwie odgadnienia dokonało, zniżyć tę liczbę na przykład o 10 mówiąc: „Skoro nie możesz odjąć 27, odejmij 17" i następnie dać jeszcze kilka innych poleceń wykonania działań nadprogramowych.

Jeszcze łatwiej takie zacieranie śladów da się przeprowadzić w drugim przypadku, gdy suma otrzymana jest większa niż 27: można kontynuować różne dodawania, mnożenia, dzielenia, by w końcu bez żadnego dalszego pytania wyprowadzić wniosek, gdzie jest liczba parzysta, a gdzie nieparzysta. Doprowadza to zazwyczaj do ogólnego zdumienia.

Przy powtórzeniu doświadczenia można zamiast liczby 27 z jednakowym skutkiem kazać odjąć 28, gdyż owa próba odejmowania opiera się na uwzględnieniu dwóch możliwości:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26$$

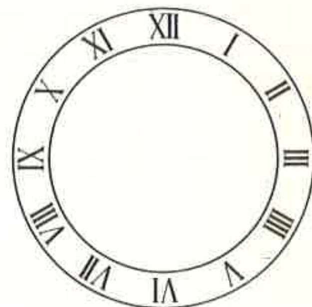
albo

$$3 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 29.$$

Obie więc liczby — zarówno 27 jak i 28 — mieszczą się pomiędzy tymi dwoma jedynie możliwymi rezultatami.

7. O której godzinie się spotkamy

Pomyśl, o której godzinie będziemy mogli się jutro spotkać. Gdy godzinę tę ustalisz, weź ołówek i rozpoczynając od liczby VII na tarczy zegarka posuwaj go kolejno poprzez VI, V i tak dalej, licząc od godziny przez ciebie wybranej aż do godziny dziewiętnastej. Gdy dojdziesz do dziewiętnastu zatrzymaj się; przekonasz się wówczas, żeś mi właśnie wskazał na zegarku godzinę przez siebie pomyślaną.



Na przykład ktoś pomyślał sobie godzinę czwartą. Według polecenia odgadującego powinien wskazując ołówkiem liczbę VII na tarczy zegarka powiedzieć w myśli: 4; wskazując VI powiedzieć: 5; wskazując V powiedzieć: 6 i tak dalej. Okaże się wówczas, iż wymieniając liczbę 19 wskaże właśnie godzinę IV, czyli tę, którą pomyślał.

Oczywiście może odgadujący zamiast VII wyznaczyć na początku rachuby każdą inną cyfrę na tarczy zegara, polecając jednak zawsze liczenie od liczby pomyślanej do wskazanej przezeń liczby + 12. Jeśli więc zamiast VII odgadujący każe rozpocząć od III, to musi równocześnie polecić liczyć nie do 19, lecz do 15.

Doświadczenie to można prowadzić bardzo efektownie na dwunastu kartkach, na których wypisane są liczby od 1 do 12, na dwunastu dominach lub na dwunastu kartach od asa do damy. Karty te, kartki czy domina można ułożyć w koło lub w linii prostej — stroną pustą ku górze, zapamiętawszy tylko dobrze, w jakim miejscu znajduje się liczba, od której zamierzamy polecić rozpoczęcie liczenia, więc VII, III czy jakakolwiek inna. Wtedy liczący doszedłszy do 19, 15 lub innej wskazanej przez odgadującego liczby odkryje kartkę z liczbą przez siebie pomyślaną.

Zasada odgadnienia tego jest tak prosta, że zbyteczne są wyjaśnienia.

8. Odgadywanie daty urodzenia

Liczbę, która oznacza dzień twoich urodzin, pomnóż przez 20 i dodaj 77. Sumę pomnóż przez 5 i dodaj liczbę oznaczającą miesiąc, w którym przyszedłeś na świat. Pomnóż tę sumę przez 20 i znów dodaj 77. Pomnóż przez 5, dodaj dwie ostatnie cyfry roku, w którym się urodziłeś. Powiedz mi rezultat, a z łatwością odczytam w otrzymanej przez ciebie wielkiej i dziwacznej liczbie dokładną datę twego urodzenia.

Odgadnienie polega na odjęciu liczby 38 885 od rezultatu wszystkich powyższych działań i odczytaniu pierwszych dwu cyfr różnicy — jako dnia, drugich dwu — jako miesiąca, ostatnich dwu — jako roku (zakładamy, że co do stulecia, w którym nastąpiło owo najważniejsze dla danej osoby zdarzenie, nie może zachodzić żadna wątpliwość).

Na przykład ktoś urodził się 22 grudnia 1881 roku. Wypełniając kolejno wskazywane działania otrzyma się następujące rezultaty pośrednie:

$$20 \cdot 22 + 77 = 517$$
$$5 \cdot 517 + 12 = 2597$$
$$20 \cdot 2597 + 77 = 52017$$
$$5 \cdot 52017 + 81 = 260166.$$

Od podanego wyniku 260 166 odgadujący odejmuje 38 885 i otrzymawszy 221 281 oznajmia datę urodzenia: 22. 12. 81.

Przytoczona tu liczba 77, którą się dwukrotnie dodaje, może być zastąpiona każdą inną liczbą k dowolnie przez odgadującego wybraną — z tą jednak zmianą, że zamiast 38 885, czyli $505 \cdot 77$, odejmować trzeba będzie $505\,k$.

Odgadnienie to opiera się na tej samej zasadzie, co odgadnienie równoczesne kilku liczb, wyjaśnione poprzednio.



Nieco odmienny sposób odgadnięcia daty znajdujemy we włoskim, nader obszernym zbiorze rozrywek inż. J. Ghersiego.

Oto jego treść:

Zechciej podwoić datę dnia urodzin, dodaj 4, pomnóż sumę przez 50, dodaj liczbę porządkową miesiąca, pomnóż przez 100, odejmij liczbę lat, jakie miałeś przed rokiem, i podaj mi rezultat.

Przypuśćmy na przykład, iż odgadnienie odbywało się w roku 1939 i że chodziło o datę urodzenia pewnej młodej osoby, która przyszła na świat w roku 1922, dnia 26 marca:

$$2 \cdot 26 = 52,\quad 52 + 4 = 56,\quad 50 \cdot 56 = 2800,\quad 2800 + 3 = 2803,$$
$$100 \cdot 2803 = 280\,300,\quad 280\,300 - 16 = 280\,284.$$

Odgadnienie polega na odjęciu od powyższego ostatecznego wyniku pewnej liczby M. Liczba ta ulega zmianie w zależności:

1° od stulecia, w którym nastąpiło przyjście na świat danej osoby,

2° od roku, w którym odgadujący popisuje się tym doświadczeniem.

Jeżeli chodzi o osobę urodzoną jeszcze w XIX wieku, to wtedy $M = 20\,000 - 99 - k$, gdzie k oznacza ostatnie dwie cyfry roku, w którym odbywa się odgadnienie.

Jeżeli zaś obliczenie dotyczy przedstawiciela pokolenia XX wieku, to wówczas $M = 20\,000 + 1 - k$.

Dla przytoczonego więc przez nas przykładu mamy:

$$k = 39, \qquad M = 20\,000 + 1 - 39 = 19\,962.$$

Stąd

$$\begin{array}{r} 280\,284 \\ -\ \ 19\,962 \\ \hline 260\,322 \end{array}$$

Odczytujemy: 26. 03. 22, czyli 26 marca 1922 roku.

9. Odgadnienie, która z trzech osób jaki wzięła przedmiot

Jedno z najdawniejszych, gdyż cytowane jest już przez Chuqueta w XV wieku, a zarazem jedno z najefektowniejszych odgadnień.

Proponuje się trzem osobom, by z trzech złożonych przed nimi przedmiotów, na przykład sakiewki, zegarka i pierścionka, każda wzięła po jednym przedmiocie — oczywiście pod nieobecność odgadującego. Przed odejściem jednak odgadujący bierze 24 zapałki (karty, żetony) i wręcza: pierwszej osobie — jedną, drugiej — dwie, trzeciej — trzy. Pozostałe zaś zapałki w liczbie 18 składa na stole z poleceniem, by ten, kto weźmie sakiewkę, wziął tyle zapałek, ile przed chwilą otrzymał; kto posiądzie zegarek, by wziął dwa razy tyle, ile otrzymał; a kto pierścionek — cztery razy tyle.

Po dokładnym wyjaśnieniu tej procedury odgadujący wychodzi z pokoju. Gdy towarzysze rozbiorą pomiędzy siebie złożone przed nimi przedmioty i zapałki, odgadujący powraca, rzuca okiem na stół, aby stwierdzić, ile zapałek pozostało, i jeśli jest wprawny, *niezwłocznie* rozstrzyga, u kogo się znajduje sakiewka, u kogo zegarek, a u kogo pierścionek.

Tak szybkie odgadnienie opiera się na tej podstawie, że nie może być więcej niż sześć kombinacyj i przy nich zawsze inna ilość zapałek pozostaje nie rozebrana.

Aby rzecz tę poglądowo wyjaśnić, oznaczmy trzy osoby cyframi rzymskimi I, II, III, przedmioty zaś trzema samogłoskami: *a* to będzie sakiewka, *e* — zegarek, *i* — pierścionek. Wszystkie możliwe kombinacje tak się przedstawiają:

	I	II	III	I	II	III	I	II	III
	a	*e*	*i*	*e*	*a*	*i*	*a*	*i*	*e*
Zapałki rozdane	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Zapałki rozebrane	1	4	12	2	2	12	1	8	6
		23			22			21	
Zostaje zapałek		1			2			3	

	I	II	III	I	II	III	I	II	III
	e	*i*	*a*	*i*	*a*	*e*	*i*	*e*	*a*
Zapałki rozdane	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Zapałki rozebrane	2	8	3	4	2	6	4	4	3
		19			18			17	
Zostaje zapałek		5			6			7	

Gdy więc odgadujący spostrzeże na stole 3 zapałki, już wie, że pierwsza osoba ma sakiewkę, druga pierścionek, trzecia zegarek; gdy ujrzy 6 zapałek, pewien jest, że pierwsza wzięła pierścionek, druga sakiewkę i tak dalej.

Cała trudność polega na dokładnym zapamiętaniu, przy jakiej reszcie z podziału zapałek jaka zachodzi kombinacja. Jak to sobie udostępnić?



Spośród wszystkich znanych nam zbiorków rozrywek jeden tylko stary podręcznik podaje ujęcie kombinacyj — dla ich łatwiejszego zapamiętania — w formułę słowną. Ale autor nie umiał dobrego pomysłu dobrze wykonać. Proponujemy tu własną formułę, której zapamiętanie nie przedstawia żadnych trudności:

Zdanie poniższe da się podzielić na siedem części. W każdej części są dwie samogłoski, z których pierwsza oznacza przedmiot wzięty przez pierwszą osobę, a druga — przez drugą osobę. Numer kolejny danej części w zdaniu zgadza się z liczbą zapałek, które zostały na stole.

1	2	3	4	5	6	7
Zawsze	*trzeba*	*ganić*	*smutku*	*grzech i*	*siać*	*śmiech*

Wyraz czwarty celowo zawiera nic w tym wypadku nie oznaczającą samogłoskę *u*, gdyż kombinacji takiej, w której pozostawałyby 4 zapałki — nie ma.

Za pomocą tego zdania łatwo można — bez specjalnego uczenia się na pamięć sześciu kombinacyj — po minimalnym namyśle trafnie odgadnąć, w jaki sposób przedmioty rozebrano.

Przypuśćmy, na przykład, że na stole zostały 2 zapałki. Odgadujący stwierdza, iż drugim słowem jest „trzeba", a więc I osoba ma zegarek (*e*), II osoba — sakiewkę (*a*), a III osoba — pierścionek.

Przypuśćmy teraz, że na stole zostało 5 zapałek. Na piątym miejscu stoją dwa słowa jednosylabowe: „grzech i"; samogłoski *e*, *i* oznaczają, że I osoba wzięła zegarek (*e*), II wzięła pierścionek (*i*), a więc III osoba z konieczności musiała wziąć sakiewkę.

Gdyby zostały 4 zapałki, odgadujący może oczywiście z całą pewnością orzec, iż zaszła pomyłka przy rozbieraniu zapałek.



10. Odgadnienie, która z dziewięciu osób na który palec której ręki włożyła pierścień

Jest to odgadnienie jeszcze efektowniejsze, a zarazem jeszcze dawniejsze niż poprzednie, przytacza je bowiem już Leonard z Pizy w swym *Liber abaci* z roku 1202.

Odgadujący wręcza towarzystwu (złożonemu z co najwyżej dziewięciu osób) pierścień, prosząc, by pod jego nieobecność ktoś zechciał ten pierścień włożyć na palec, on zaś podejmuje się odgadnąć nie tylko, kto z obecnych, na której ręce i na jakim palcu, ale nawet — na którym członie palca pierścień umieścił.

Gdy po chwilowej nieobecności odgadujący powraca do towarzystwa, prosi, by ktoś, kto biegle liczy i wie dokładnie, gdzie pierścień się znajduje, zechciał dokonać szybko w myśli lub pisemnie szeregu następujących działań i wyjawił jedynie rezultat ostateczny:

Otóż należy podwoić numer miejsca, które zajmuje w szeregu obecnych osoba mająca pierścień, do liczby otrzymanej dodać 5, sumę pomnożyć przez 5 i dodać 10. Następnie dodać jeszcze 1, jeśli pierścień jest na prawej ręce, a 2, jeśli na lewej. Dalej należy wszystko pomnożyć przez 10 i dodać liczbę oznaczającą palec, na którym jest pierścień, licząc od wielkiego palca. Znów pomnożyć przez 10, dodać liczbę oznaczającą człon palca, licząc od dłoni. Jeszcze dodać 35 i wymienić rezultat ostateczny.

Odgadnienie polega na odjęciu 3535 od liczby otrzymanej z działań powyższych i na umiejętnym odczytaniu liczby pozostałej. Przykład najlepiej to wyjaśni.

Przypuśćmy, że pierścień miała szósta osoba i włożyła go na trzeci człon wskazującego palca prawej ręki. Przebieg działań będzie następujący:

	6	(numer osoby)
×	2	
	12	
+	5	
	17	
×	5	
	85	
+	10	
	95	
+	1	(prawa ręka)
	96	
×	10	
	960	
+	2	(palec wskazujący)
	962	
×	10	
	9620	
+	3	(trzeci człon palca)
	9623	
+	35	
	9658	
Odgadujący odejmuje	3535	
	6123	

i odczytuje: pierścień ma szósta osoba (6), umieściła go na prawej ręce (1), na wskazującym palcu (2), na jego trzecim członie (3).

Odgadnienie powyższe może stać się wdzięcznym tematem do samodzielnego opracowania jego wariantów liczbowych, a nawet do układania analogicznych zagadnień, na odnalezienie na przykład wiersza w bibliotece, w oznaczonych liczbami: szafie, półce, książce i stronicy.



VI

Z TAJNIKÓW SZACHOWNICY, KART I DOMINA

UWAGI OGÓLNE

Spośród gier i zabaw, którym poświęcimy rozdział VI niniejszej książki, wydzielone zostały te trzy, aczkolwiek o właściwej grze w szachy ani o grze w karty nie będzie tu mowy. Z samych jednak przedmiotów służących do obu gier tak wiele można wytworzyć kombinacyj matematycznych, że godne są one szczególnego traktowania.

Co się zaś tyczy domina, jest to gra matematyczna w ostatnich czasach wśród młodszego pokolenia mało znana lub niedoceniana. Chcemy tedy jej zasadom i odmianom poświęcić nieco więcej miejsca, nie pomijając też w końcu przeróżnych łamigłówek i sztuczek, które można układać za pomocą kostek domina.

SZACHOWNICA

1. Honorarium wynalazcy

Podanie głosi, że twórca szachów, uczony Sissa-Nassir — gdy władca Indyj, zachwycony nową grą, obiecał wynagrodzić go „wszystkim", czegokolwiek zapragnie — zażądał zapłaty pozornie skromnej, chciał bowiem otrzymać tyle tylko zboża, ile przypadnie, gdy poprzez wszystkie 64 pola szachownicy podwajane będzie jedno małe ziarenko, złożone na pierwszym polu. To znaczy chciał otrzymać tyle ziaren, ile wypadnie z sumowania postępu geometrycznego, którego pierwszym wyrazem jest 1, ilorazem 2, a liczbą wyrazów 64.

I stało się podobnie jak z owym nabywcą konia, któremu chciano dodać konia darmo przy nabyciu hufnali wycenionych na tej samej zasadzie.

Władca Indyj, najbogatszy człowiek na świecie, nie był absolutnie w możności takiego honorarium uiścić. Więcej powiedzieć można: ów książę wschodni o wybujałej wyobraźni nie był w stanie zapewne takiej ilości zboża nawet sobie wyobrazić!

Jest to suma szeregu, złożonego z potęg liczby 2 z wszystkimi kolejnymi wykładnikami od 0 do 63, co wyniesie:

18 446 744 073 709 551 615 ziaren,

albo w metrach kubicznych:

922 337 203 685 m^3

licząc, że na 1 cm^3 idzie 20 ziaren, czyli 20 milionów ziaren na 1 m^3.

Obliczono, że aby osiągnąć taką ilość zboża, należałoby zasiać całą Ziemię ośmiokrotnie i ośmiokrotnie zebrać żniwo, inaczej: ilość ta równałaby się zbiorom zboża z planety o powierzchni ośmiokrotnie większej niż nasza Ziemia.

Dobrym zaiste matematykiem musiał być ów Sissa-Nassir i dobrą nauczkę dał swemu księciu wykazując mu, jak dalece „nie wszystkim", czego zażąda wynalazca, mógł rozporządzać.



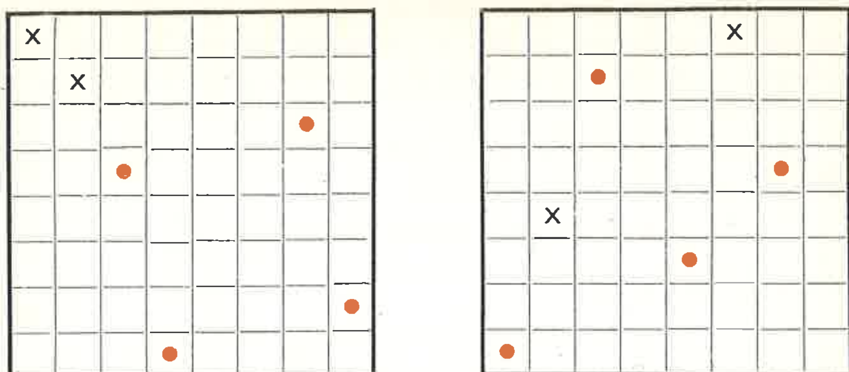
2. Trzy zagadnienia o kilku hetmanach

A. Hetman w szachach ma, jak wiadomo, prawo posuwania się i bicia na wszelką odległość i we wszystkich kierunkach: wzdłuż szeregów pól i po przekątnych szachownicy. Pola, po których hetman może się posuwać i bić, nazywają się polami zagrożonymi, inaczej zaszachowanymi albo będącymi pod szachem.

Otóż przedstawiwszy sobie, że zamiast — jak zwykle — dwóch hetmanów, jest ich czterech (w tym celu można zwykłym pionkom nadać przywileje hetmana), należy odnaleźć takie ich rozstawienie na szachownicy, by możliwie najwięcej pól było pod szachem.

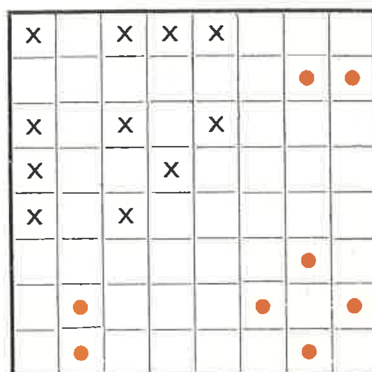
Jest kilka pozycyj, przy których z 64 pól tylko dwa są wolne od szachu. Przytaczamy tu dwie zachęcając Czytelników do odszukania innych.

Na tablicach tych kółka oznaczają hetmanów, a krzyżyki — pola nie zagrożone.



Warto również odnaleźć podobne maksimum szachowanych pól dla czterech wież, gońców lub koników, zachowując właściwość ruchów tych figur.

B. Ośmiu hetmanów rozstawić tak, by zostało jak najwięcej pól wolnych od szachu. Oto jedno z rozwiązań, przy którym pozostaje jedenaście pól wolnych:



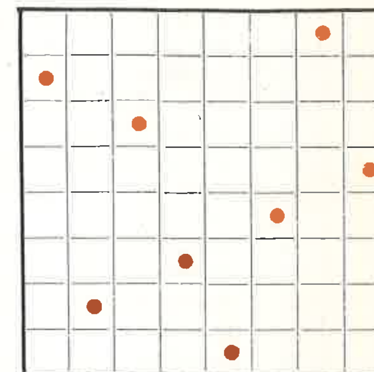
Mogą być różne inne rozmieszczenia hetmanów, ale nie zdołano odszukać jeszcze takiego, przy którym byłoby więcej pól wolnych; nikt jednak dotychczas matematycznie nie dowiódł, że jest to niewykonalne. Obecnie więc 11 pól wolnych uchodzi za maksimum. Warto niewątpliwie sprawdzić, czy nie uda się pobić tego światowego rekordu.

Bardzo ciekawe też są podobne zadania z wieżami, gońcami i konikami. Można też je nieco modyfikować: na przykład odszukać, ile co najmniej trzeba użyć koni lub gońców i jak je rozstawić, aby wszystkie pola były zaszachowane, albo: ile co najwyżej koni, wież czy gońców można ustawić na szachownicy tak, żeby żaden drugiego nie szachował.



C. Najbardziej popularne i najszczegółowiej opracowane jest zadanie z ośmiu hetmanami, polegające na tak zgodnym ich rozstawieniu, by żaden nie szachował drugiego.

Zagadnieniu temu sporo uwagi poświęcili matematycy, między nimi znakomity matematyk niemiecki Karol Fryderyk Gauss, który wyszczególnił wszystkie możliwe kombinacje. A jest ich... Jak sądzicie? — Chyba nie więcej niż kilka!

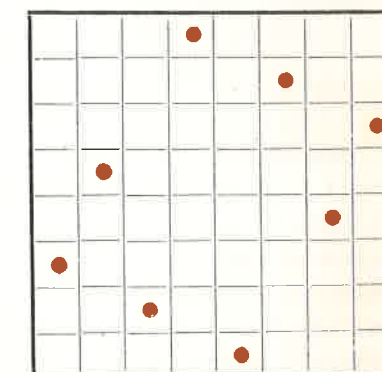


Tak zdawać by się mogło każdemu, kto grywa w szachy i wie, jak potężną figurą jest hetman, jak bolesna jest jej utrata. Różnych jednak rozwiązań zadania tego jest aż 92. Co prawda w liczbie tej zasadniczych rozstawień jest tylko 12, pozostałe zaś są jedynie ich odmianami.

Jeśli oznaczymy rozstawienie hetmanów w powyższym wzorze szeregiem 72631485, idąc kolejno z lewa na prawo i notując, na którym polu od dołu każdej kolumny znajduje się hetman, to zasadnicze rozwiązania tak się przedstawiają:

(1)	72631485	(7)	16837425
(2)	61528374	(8)	57263184
(3)	58417263	(9)	48157263
(4)	35841726	(10)	51468273
(5)	46152837	(11)	42751863
(6)	57263148	(12)	35281746

Każde z tych rozwiązań podstawowych, z wyjątkiem dwunastego, daje po 8 odmian: cztery odmiany powstaną przez obracanie szachownicy, drugie cztery — z przestawiania kolumn i rzędów pól.



Na szczególne wyróżnienie zasługuje rozwiązanie dwunaste — nie tylko z uwagi na symetryczne, w kształcie równoległoboku, rozstawienie hetmanów, ale bardziej dlatego, że daje ono tylko 4 odmiany, o czym łatwo się przekonać obracając szachownicę: gdy obrócimy ją o 180°, otrzymamy dyspozycję zupełnie identyczną.

Oto tabela wszystkich rozwiązań zadania:

1	15863724	24	36815724	47	51468273	70	63185247
2	16837425	25	36824175	48	51842736	71	63571428
3	17468253	26	37285146	49	51863724	72	63581427
4	17582463	27	37286415	50	52468317	73	63724815
5	24683175	28	38471625	51	52473861	74	63728514
6	25713864	29	41582736	52	52617483	75	63741825
7	25741863	30	41586372	53	52814736	76	64158273
8	26174835	31	42586137	54	53168247	77	64285713
9	26831475	32	42736815	55	53172864	78	64713528
10	27368514	33	42736851	56	53847162	79	64718253
11	27581463	34	42751863	57	57138642	80	68241753
12	28613574	35	42857136	58	57142863	81	71386425
13	31758246	36	42861357	59	57248136	82	72418536
14	35281746	37	46152837	60	57263148	83	72631485
15	35286471	38	46827135	61	57263184	84	73168924
16	35714286	39	46831752	62	57413862	85	73825164
17	35841726	40	47185263	63	58413627	86	74258136
18	36258174	41	47382516	64	58417263	87	74286135
19	36271485	42	47526138	65	61528374	88	75316824
20	36275184	43	47531682	66	62713584	89	82417536
21	36418572	44	48136275	67	62714853	90	82531746
22	36428571	45	48157263	68	63175824	91	83162574
23	36814752	46	48531726	69	63184275	92	84136275

Tabela ta zawiera, jak widzimy, tylko po 4 rozwiązania rozpoczynające się lub kończące na 1 i 8, po 8 rozwiązań rozpoczynających się lub kończących na 2 i 7, najwięcej zaś rozwiązań kończy się na 3, 4, 5 i 6. Czym te różnice wytłumaczyć?

Pożytecznym i ciekawym zadaniem będzie odszukać w tablicy kolejno rozwiązania podstawowe i przy każdym zaznaczyć siedem jego pochodnych.

A oto zasada, jaką kierował się Gauss:

Umieszcza się pierwszego hetmana w najbliższym polu pierwszej z lewa kolumny, drugiego — w drugiej kolumnie, możliwie najniżej itd., aż dojdziemy do takiej kolumny, w której nie będzie można umieścić hetmana; wówczas poprzednio postawionego hetmana należy przestawić wyżej, co często pociąga za sobą konieczność zmiany pól dalszych hetmanów wstecz itd.



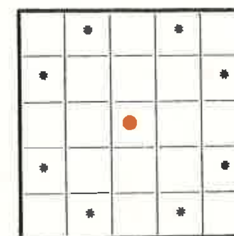
Podobne zadanie dla 8 wież ma nie mniej niż 40 320 różnych rozwiązań. Dla 8 gońców albo koni liczba rozwiązań jest niewątpliwie wyższa, ale nikt jej dotychczas nie ustalił. Natomiast liczbę różnych wzajemnych pozycyj dwóch królów, osieroconych przez wszystkie figury, co się tak często przytrafia dwu kiepskim graczom, określa Rouse Ball na 1806, według takiej formuły: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n^2+3n-2)$, gdzie n jest to liczba pól w każdej kolumnie szachownicy.

3. Zadania konikowe

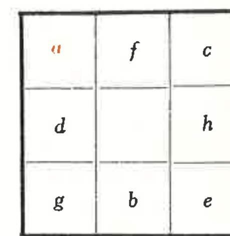
W końcu ubiegłego i na początku tego wieku niezmiernie modne były tak zwane zadania konikowe. Polegały one na tym, iż w kwadracie, podzielonym na mniejszą lub większą ilość pól, wpisane były poszczególne sylaby, których kolejność należało odszukać stosując skoki konika szachowego. W rozwiązaniu otrzymywało się wierszyk lub aforyzm.

Nie o tych jednak zadaniach konikowych będzie tu mowa, lecz o ich zasadzie, to znaczy o sposobach, jak można *skokami konika szachowego obiec wszystkie bez wyjątku 64 pola szachownicy*, raz jeden tylko każdego z nich dotknąwszy.

Dla tych, którzy nie znają zasad gry w szachy, podajemy dwa wykresy w celu wyjaśnienia, na czym polega tak zwany *skok konika*. Metoda poglądowa o wiele skuteczniej pouczy niż długie opisy.



Rys. I



Rys. II

Otóż na rysunku I z pola zaznaczonego kółeczkiem można skokiem konika przedostać się na każde z pól oznaczonych gwiazdkami.

Na rysunku II, wychodząc z pola oznaczonego literą *a* można skokami konika obiec w kolejności alfabetycznej osiem pól oznaczonych literami i z pola *h* powrócić do *a*.

Zagadnieniami skoków konika po szachownicy zajmowało się bardzo wielu matematyków; wśród nich najgruntowniejsze są studia sławnego matematyka Eulera. Metodę jego, uważaną za najogólniejszą, chociaż nie najłatwiejszą, podajemy na pierwszym miejscu.

A. *Metoda Eulera* (koniec wieku XVIII). Skoki rozpoczyna się z dowolnego pola i obiega się bez szczegółowego wyboru możliwie największą ilość pól, oznaczając je kolejnymi liczbami. Gdy wszystkie możliwe ruchy zostaną wyczerpane, to znaczy, gdy z jakiegoś pola już nie będzie mógł konik dalej skoczyć, oznacza się to pole jako ostatnie i przystępuje się do przesunięć, których cel i sposób najłatwiej wykażą przykłady.

Przypuśćmy, że konik zdołał obiec 63 pola, nie może jednak doskoczyć do ostatniego pola oznaczonego na tabelce I kółeczkiem, gdyż nie leży ono w odległości skoku. Odszukuje się wówczas pola, poprzez które w drodze najkrótszej mógłby konik z pola 63 przedostać się na pole nie oznaczone jeszcze numerem. Takie są pola 16 i 15. (Są też inne drogi do „przekoniko-

wania" z pola 63 na ●, więc 16 i 47, 14 i 15, 30 i 29 i tym podobne, wybieramy jednak dla przykładu drogę pierwszą, inne pozostawiając Czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania).

7	54	25	42	5	56	27	44
24	41	6	55	26	43	4	57
53	8	23	20	33	12	45	28
40	19	32	13	30	21	58	3
9	52	63	22	11	34	29	46
18	39	10	31	14	47	2	59
51	62	37	16	49	60	35	●
38	17	50	61	36	15	48	1

Tab. I

7	24	53	36	5	22	51	34
54	37	6	23	52	35	4	21
25	8	55	58	45	12	33	50
38	59	46	13	48	57	20	3
9	26	15	56	11	44	49	32
60	39	10	47	14	31	2	19
27	16	41	62	29	18	43	64
40	61	28	17	42	63	30	1

Tab. II

Stawiamy tedy na polu oznaczonym ● liczbę 64, przenosimy 63 na miejsce 15, potem przenosimy 62 na miejsce 16, następnie 61 na miejsce 17, 60 na 18 i dalej kolejno, jak to wskazuje tabelka II. Gdy dojdziemy wreszcie do pola pierwotnie zajmowanego przez numer 63, przypadnie na nie obecnie liczba 15; to pole „skonikowane" jest z polem 14. Pola od 1 do 14 nie ulegają żadnej zmianie.

Przypuśćmy teraz, że po pierwotnym konikowaniu pozostało wolne nie jedno pole, lecz 10 pól wolnych, jak to wskazano na tabelce III, na której pola „nie obskoczone" oznaczono kółkami.

●	54	41	50	43	52	●	48
●	●	38	53	●	49	44	15
37	40	1	42	51	16	47	●
●	21	36	39	12	45	14	29
35	2	33	22	17	28	11	46
20	23	18	●	10	13	30	7
3	34	25	32	5	8	27	●
24	19	4	9	26	31	6	●

Tab. III

●	55	42	51	44	53	●	49
1	●	39	54	●	50	45	16
38	41	2	43	52	17	48	●
●	22	37	40	13	46	15	30
36	3	34	23	18	29	12	47
21	24	19	●	11	14	31	8
4	35	26	33	6	9	28	●
25	20	5	10	27	32	7	●

Tab. IV

Konik „ugrząził" — jak widzimy — na polu 54. Przestawiamy w tym przypadku 1 na drugie od góry pole pierwszej z lewa kolumny, na miejsce 1 przypadnie 2 — i tak dalej, wreszcie na miejsce 54 przypadnie numer 55. W ten sposób otrzymamy już o jedno puste pole mniej, a rezultat całego przestawienia unaocznia tabelka IV.

W tym nowym kwadracie pole 39 „konikuje" się z górnym lewym polem i równocześnie konikują się pola 38 i 55. Stawiamy tedy w pustym rogu numer 56, a na miejscu 39 numer 55; na miejscu 40 przypadnie 54, na miejscu

56	39	52	43	50	41	●	45
1	●	55	40	●	44	49	16
38	53	2	51	42	17	46	●
●	22	37	54	13	48	15	30
36	3	34	23	18	29	12	47
21	24	19	●	11	14	31	8
4	35	26	33	6	9	28	●
25	20	5	10	27	32	7	●

Tab. V

●	39	52	43	50	41	56	45
1	●	●	40	55	44	49	16
38	53	2	51	42	17	46	57
●	22	37	54	13	48	15	30
36	3	34	23	18	29	12	47
21	24	19	●	11	14	31	8
4	35	26	33	6	9	28	●
25	20	5	10	27	32	7	●

Tab. VI

●	31	18	27	20	29	14	25
1	●	●	30	15	26	21	54
32	17	2	19	28	53	24	13
●	48	33	16	57	22	55	40
34	3	36	47	52	41	12	23
49	46	51	58	11	56	39	8
4	35	44	37	6	9	42	●
45	50	5	10	43	38	7	●

Tab. VII

59	28	41	32	39	30	55	34
42	●	60	29	56	33	38	5
27	58	43	40	31	6	35	54
●	11	26	57	2	37	4	19
25	44	23	12	7	18	53	36
10	13	8	1	52	3	20	49
45	24	15	22	47	50	17	●
14	9	46	51	16	21	48	●

Tab. VIII

2	33	20	29	22	31	6	27
19	62	1	32	5	28	23	42
34	3	18	21	30	43	26	7
61	48	35	4	39	24	41	56
36	17	60	49	44	55	8	25
47	50	45	38	9	40	57	12
16	37	52	59	14	11	54	●
51	46	15	10	53	58	13	●

Tab. IX

2	33	20	29	22	31	6	27
19	36	1	32	5	28	23	60
34	3	18	21	30	61	26	7
37	50	35	4	57	24	59	42
54	17	38	49	62	43	8	25
51	48	53	56	9	58	41	12
16	55	46	39	14	11	44	●
47	52	15	10	45	40	13	●

Tab. X

2	33	20	29	22	31	6	27
19	36	1	32	5	28	23	42
34	3	18	21	30	41	26	7
37	52	35	4	45	24	43	60
48	17	38	53	40	59	8	25
51	54	49	46	9	44	61	12
16	47	56	39	14	11	58	63
55	50	15	10	57	62	13	●

Tab. XI

2	29	16	25	18	27	62	23
15	32	1	28	63	24	19	38
30	3	14	17	26	37	22	61
33	52	31	4	59	20	39	44
56	13	34	51	36	45	60	21
53	50	55	58	5	40	43	8
12	57	48	35	10	7	46	41
49	54	11	6	47	42	9	●

Tab. XII

41 będzie 53 i tak dalej aż do pola 38, które nie ulegnie zmianie; następne liczby 37, 36..., również pozostaną na polach dotychczasowych. Dalsze manipulacje łatwo już przeprowadzić na podstawie pokazanych wyżej kolejnych przemian.

W ten sposób osiągnęliśmy cel naszych zabiegów: cała szachownica została pokryta kolejnymi skokami konika.

Zazwyczaj jednak nie poprzestaje się na tym, lecz zdąża się do udoskonalenia rozwiązania w ten sposób, by obieg konikowy szachownicy był zamknięty, to znaczy, by z pola 64 można było przeskoczyć z powrotem na pole 1; wówczas każde pole można wziąć za pierwsze, od którego rozpoczyna się skoki.

Aby to osiągnąć, odszukujemy dwa pola z liczbami kolejnymi, które zatem konikują się między sobą, a z których jedno konikuje się z polem 1, drugie zaś z polem 64. Takie są w tabeli XIII pola 48 i 47. Przestawiamy wówczas ostatnie pole 64 na miejsce 47, numer 63 przejdzie na 46 — i tak dalej aż do numeru 1, który przypadnie na miejsce pola 64.

Szachownica w ostatecznym rezultacie przybiera postać przedstawioną na tabeli XIV.

2	63	30	49	56	47	28	51
31	60	1	64	29	50	55	46
62	3	32	57	48	45	52	27
59	18	61	4	25	53	39	10
22	33	58	17	44	11	26	53
19	16	21	24	5	40	9	38
34	23	14	43	36	7	12	41
15	20	35	6	13	42	37	8

Tab. XIII

19	2	47	16	9	64	45	14
48	5	18	1	46	15	10	63
3	20	49	8	17	62	13	44
6	35	4	21	42	11	56	27
39	50	7	34	61	28	43	12
36	33	38	41	22	57	26	55
51	40	31	60	53	24	29	58
32	37	52	23	30	59	54	25

Tab. XIV



B. *Metoda ramowa Moona* (1843). Szachownicę dzieli się na dwie części: wewnętrzną o 16 polach i zewnętrzną w formie ramy z 48 polami. Pola wewnętrznego kwadratu oznaczymy wielkimi literami *A*, *B*, *C*, *D* w ten sposób, iż każda z liter tych, czterokrotnie powtórzona, formuje kwadrat lub romb konikowy, to jest taki, po którego wszystkich bokach może skakać konik. Te same litery, tylko małe, wypisujemy w polach ramowych tak, aby skoki konika po każdej z nich tworzyły wielokąty zamknięte. Jak łatwo się przekonać, porządek ustawienia i przestawienia liter jest ten sam, co w kwadracie środkowym.

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	A	B	C	D	d	c
d	c	C	D	A	B	b	a
a	b	B	A	D	C	c	d
c	d	D	C	B	A	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Konik rozpoczyna skoki od któregokolwiek pola ramowego; gdy przebiegnie po obranej literze dokoła ramy i w dwunastu skokach wyczerpie np. literę *a*, wówczas przeskakuje do kwadratu wewnętrznego, jednak nie na literę *A*, lecz na jakąkolwiek inną, np. *B*, *C* lub *D*. Wyczerpawszy wszystkie pola oznaczone tą literą przeskakuje znów za ramę — na literę, która nie była poprzednio przezeń „obskakiwana", obiega ponownie dokoła ramy do wyczerpania tej drugiej litery i tak dalej, aż póki nie dotrze do pola 64.

C. *Metoda ramowa Moivre'a* (początek XVIII w.). Jest to sposób zbliżony do poprzedniego. Różnica polega na tym, iż konik skacze po polach ramowych, obiegając je dowolnie dookoła, póki nie trafi na pole, z którego już na inne pole ramowe przeskoczyć nie może; wówczas skacze na jedno z pól wewnętrznych i niezwłocznie powraca na ramę przebiegając ją ponownie dokoła, by znów gdzieś z konieczności zawadzić o jedno pole wewnętrzne. Dopiero gdy już wszystkie pola ramowe zostaną wyczerpane, konik przechodzi na kwadrat wewnętrzny i ten kolejno obiega po wszystkich poprzednio nie odwiedzonych polach. Przykład, podany obok, sposób ten najlepiej wyjaśni.

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

D. *Metoda Rogeta podziału na ćwiartki* (połowa XIX w.). Jest to najłatwiejszy, a mało rozpowszechniony sposób konikowania. Szachownicę dzieli się krzyżem przez środek na cztery równe części. W każdym z tych kwadratów szesnastopolowych rozstawia się litery *a*, *b*, *c*, *d* w taki sam zupełnie sposób, jak to czyniliśmy w kwadracie wewnętrznym w metodzie Moona.

a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*
a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*

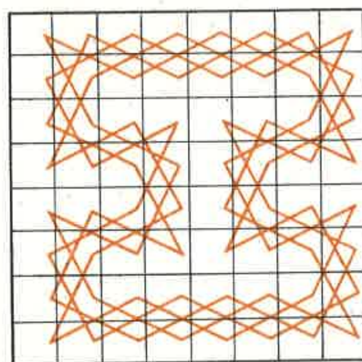
34	51	32	15	38	53	18	3
31	14	35	52	17	2	39	54
50	33	16	29	56	37	4	19
13	30	49	36	1	20	55	40
48	63	28	9	44	57	22	5
27	12	45	64	21	8	41	58
62	47	10	25	60	43	6	23
11	26	61	46	7	24	59	42

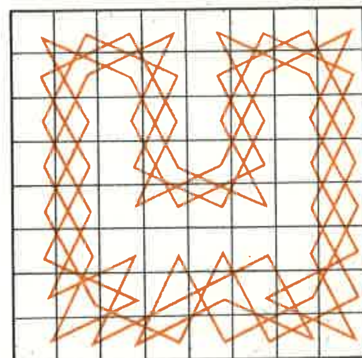
Skoki rozpoczyna się od litery dowolnej. Skacze się kolejno przez wszystkie cztery pola tej litery w danym kwadracie, następnie przechodzi się na tę samą literę sąsiedniego kwadratu i tak postępuje się dalej.

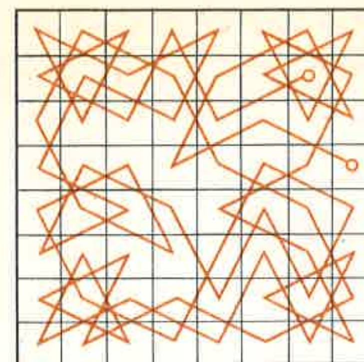
Wyczerpawszy wszystkie 16 pól oznaczonych daną literą przechodzi konik na literę następną, by znów, idąc jej polami, obiec zygzakiem dookoła szachownicy; i tak się postępuje dalej, aż do pełnych 64 pól przeskakanych.

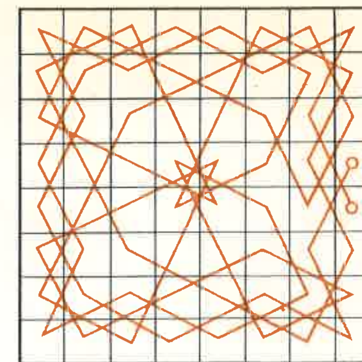
E. *Diagramy zadań konikowych* przedstawiają niejednokrotnie bardzo ciekawe i ładne desenie, jak to widać z podanych diagramów.

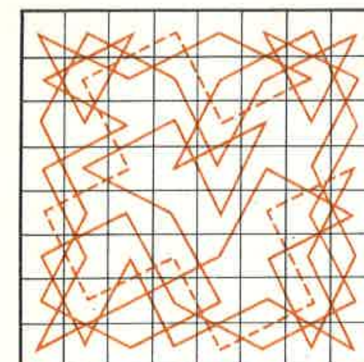
Na jednym z diagramów linie tworzą zarys zupełnie prawidłowego krzyża. Na innych diagramach powstają litery, jak na przykład na dwóch ostatnich diagramach litery N i W.

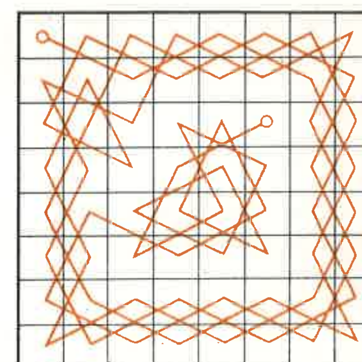


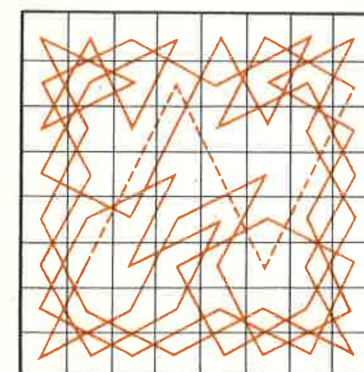


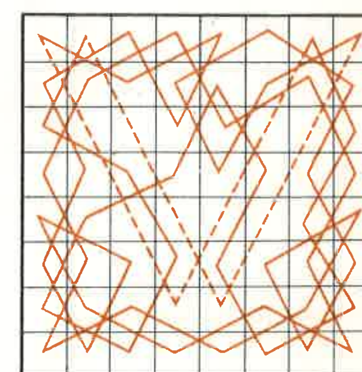








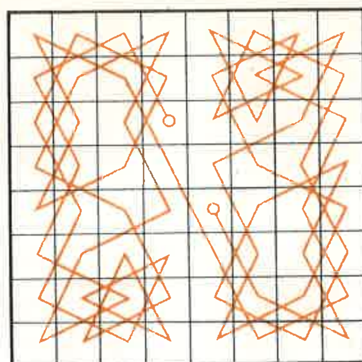




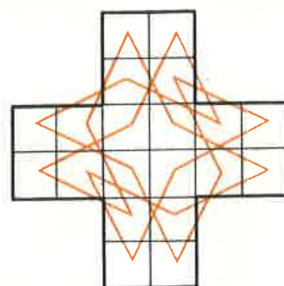
Ilość różnych rozwiązań zadania nie jest oczywiście nieskończona, ale liczba rozwiązań okazała się wielka; przewyższa 31 milionów!

Pewien matematyk daje takie wymowne określenie mnogości dróg, jakimi konik może obiec szachownicę: „Zajmowałem się odszukaniem liczby rozwiązań zadania konikowego i chociaż pracy mej w tym kierunku nie ukończyłem, mogę twierdzić, że gdybyśmy pisali po 50 rozwiązań na jednej stronicy, to trzeba by było nie mniej niż dziesięć tysięcy ryz papieru, aby je wszystkie móc pomieścić...".

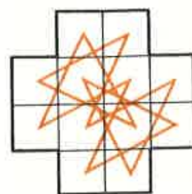
F. *Niektóre odmiany zadań konikowych.* Zamiast obiegania całej szachownicy, można postanowić, by konik obiegł naprzód jedną jej połowę, a następnie drugą, przeskakując w jednym tylko miejscu przez linie podziału.



Można też postawić sobie za zadanie, by konik skakał tylko po dwóch środkowych kolumnach i dwóch środkowych rzędach szachownicy tworzących krzyż.



Można zakres swobody ruchów jeszcze bardziej ograniczyć, jak na przykład na ostatnim rysunku:



Wreszcie można usunąć mniejszy lub większy kwadrat ze środka szachownicy i pozwolić konikowi hasać tylko po obrzeżu.

Zadania takie mnożyć można i urozmaicać na przeróżne sposoby.

4. Kwadraty konikowo-magiczne

Nieprawdopodobną wprost cierpliwość posiadać trzeba, aby przez olbrzymią liczbę prób i przemian dojść do tego, by bieg konika na szachownicy utworzył równocześnie kwadrat magiczny.

Pewien emerytowany urzędnik na Morawach, Wenzelides, w połowie ubiegłego wieku po wielu, bardzo wielu próbach doszedł do ułożenia kilku kwadratów konikowo-magicznych, niekompletnych jednak, gdyż — jak wykazuje to przytoczony poniżej przykład — sumę magiczną 260 dają tylko kolumny i rzędy, ale nie dają jej przekątne.

47	10	23	64	49	2	59	6
22	63	48	9	60	5	50	3
11	46	61	24	1	52	7	58
62	21	12	45	8	57	4	51
19	36	25	40	13	44	53	30
26	39	20	33	56	29	14	43
35	18	37	28	41	16	31	54
38	27	34	17	32	55	42	15

Kwadrat Wenzelidesa

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Kwadrat Jaenischa

Nawet takiemu znakomitemu teoretykowi szachów, jakim był Jaenisch[1]), nie powiodło się uformowanie kompletnego kwadratu konikowo-magicznego.

Podane tu magiczne kwadraty konikowe są zamknięte, to znaczy z pola 64 można ponownie przekroczyć na pole 1.

5. Inne zadania na obieg szachownicy

Prócz najpopularniejszych i najbardziej opracowanych zadań na obieg szachownicy, jakimi są zadania konikowe, istnieją inne jeszcze, mniej znane, w których rozwiązywaniu znaleźć jednak można pożyteczną i ciekawą rozrywkę.

Takim zadaniem będzie np. jednorazowy obieg przez hetmana wszystkich lub tylko oznaczonych pól szachownicy z zastrzeżeniem, że musi on się rozpocząć i skończyć na ściśle określonych dwu polach. To samo zastosować można do wieży, a nawet poniekąd do gońca. Teren dla inwencji Czytelnika jest tu bardzo szeroki...

[1]) C. F. de Jaenisch *Applications de l'Analyse mathématique au Jeu des Échecs.* 3 tomy, Petersburg 1862—1863.



KARTY

UWAGI OGÓLNE

O powstaniu gry w szachy istnieje — jak to zaznaczyliśmy — pouczająca legenda. O powstaniu gry w karty nie ma nawet legendy. Kto, gdzie i kiedy wynalazł karty? Same tylko przypuszczenia.

Prawdopodobnie karty zrodziły się w Azji, przypuszczalnie w Chinach. W XIV wieku przywędrowały do Europy, zapewne przyniesione tu przez ostatnich krzyżowców; z początku służyć miały jakoby tylko do wróżenia i stawiania kabały. Rozpowszechniły się przede wszystkim we Włoszech i Hiszpanii, następnie dość szybko pojawiają się we Francji, Niemczech, Anglii, Polsce, Rosji i innych krajach — już jako gra.

W grze tej dopatrują się niektórzy powinowactwa z szachami. Tak zwane obecnie „młódki", od 2 do 9, wyobrażane były przez ośmiu piechurów, dziesiątka — był to koniuszy, as — chorąży; walet, czyli po polsku: niżnik, odpowiadał szachowemu gońcowi, ponadto zaś jest król i królowa, jak w szachach. Polskie nazwy czterech maści brzmiały: czerwień, żołądź, dzwonek, wino.

Jak uprzedzaliśmy, nie będziemy tutaj omawiali żadnej gry w karty; co więcej, nie przytoczymy żadnego z nieprzeliczonych „fokusów" karcianych polegających na mistyfikacji, woltach, fałszywym tasowaniu i tym podobnych sztuczkach.

Wszystkie podane poniżej rozrywki z kartami opierać się będą ściśle na pewnych kombinacjach matematycznych, pouczających i bardzo nieraz ciekawych. Zacznijmy od tego, na czym w omawianiu szachów skończyliśmy: od kwadratów magicznych, układanych tym razem oczywiście z kart,

1. Karciane kwadraty magiczne

A. Wziąwszy szesnaście kart, mianowicie po cztery najwyższe z każdej maści: asa, króla, damę, waleta, należy ułożyć z nich prostokąt w ten sposób, by w każdym rzędzie, w każdej kolumnie i po obu przekątnych znalazły się w porządku dowolnym, lecz różnej maści as, król, dama i walet.

Obok dajemy rozwiązanie, a właściwie jedno z rozwiązań, gdyż rozstawienie i figur, i maści może ulegać, oczywiście, wielkiej liczbie odmian.

Jak dojść do tego wyniku?



Oznaczmy literami A, B, C i D nazwy kart niezależnie od ich maści, a przez a, b, c i d określimy ich maści. Zadanie sprowadza się do tego, żeby w szesnastu kratkach kwadratu rozmieścić cztery wielkie litery A, B, C, D w ten sposób, by wszystkie cztery znajdowały się w każdym rzędzie poziomym, pionowym i po każdej przekątnej; to samo należy uczynić z małymi literami a, b, c, d, i to mianowicie tak, żeby litery te wchodziły z wielkimi literami we wskazane w zadaniu kombinacje.

Rozmieścimy najpierw wielkie litery. Nie przedstawia to żadnej większej trudności. W pierwszym od góry rzędzie rozstawimy je w alfabetycznym porządku; następnie przystąpimy do wypełnienia kratek idących po przekątnej od lewej górnej do prawej dolnej. Dokonać tego możemy dwoma sposobami: pisząc albo *ACDB*, albo *ADBC*. Wybieramy pierwszą dyspozycję i zapełniamy już potem łatwo resztę kratek. Otrzymamy kwadrat I.

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Kwadrat I

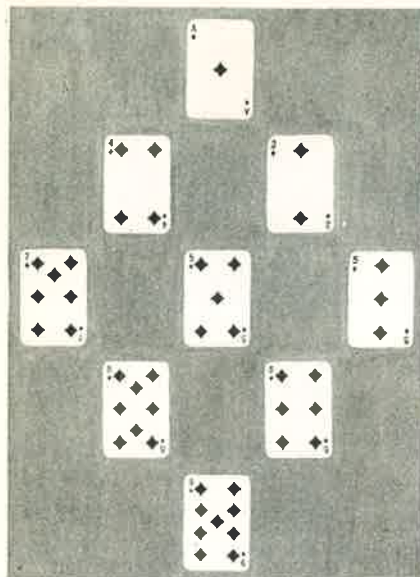
Aa	*Bd*	*Cb*	*Dc*
Db	*Cc*	*Ba*	*Ad*
Bc	*Ab*	*Dd*	*Ca*
Cd	*Da*	*Ac*	*Bb*

Kwadrat II

Ażeby teraz dołączyć odpowiednio litery małe, dopiszemy z początku do wielkich liter umieszczonych po przekątnej takież litery małe. Następnie w każdych dwu kratkach symetrycznie względem przekątnej położonych dopisywać będziemy małe litery w porządku odwrotnym do znajdujących się już tam liter wielkich: więc w kratce D dopiszemy b, a w kratce B dopiszemy d i tak dalej. Otrzymamy wówczas kwadrat II.

Jeśli zastąpimy teraz *A*, *B*, *C*, *D* odpowiednimi kartami, a mianowicie asem, królem, damą i waletem, a literom *a*, *b*, *c*, *d* nadamy maści: kiery, kara, piki, trefle, to otrzymamy podane na początku rozwiązanie zadania.

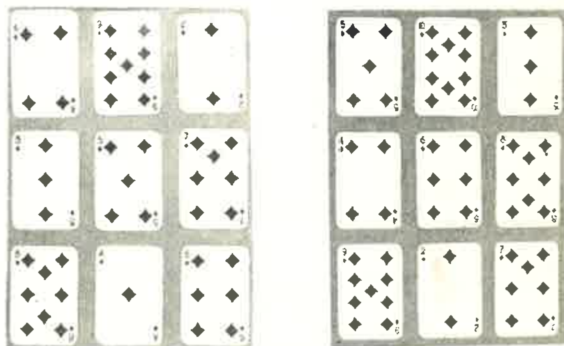
Wielkie litery można zastąpić asem, królem, damą i waletem na 24 różne sposoby; podobnie cztery małe litery zastąpić można czterema maściami na 24 różne sposoby. W rezultacie więc różnych rozwiązań niniejszego zadania za pomocą liter doszukać się możemy aż 24 · 24, czyli 576. Czy tak?



B. Należy rozłożyć w trzech rzędach dziewięć kart— od asa (który zastępować będzie jedynkę) do dziewiątki — w ten sposób, żeby liczba oczek w każdym poziomym rzędzie, w każdej pionowej kolumnie i po obu przekątnych była zawsze jednakowa.

Rozkładamy najpierw karty według podanego rysunku. Następnie kładziemy na miejsca wolne: asa pod piątką, dziewiątkę — nad piątką, trójkę — na lewo, a siódemkę — na prawo od tejże piątki. Otrzymamy wówczas żądane rozłożenie kart: kwadrat magiczny z sumą magiczną 15.

Jeśli w podanym przykładzie zastąpimy asa — dwójką, dwójkę — trójką, trójkę — czwórką itd., wreszcie dziewiątkę — dziesiątką, to oczywiście otrzymamy również kwadrat magiczny z sumą magiczną 18.





2. Skojarzenie czterech par

Rozłóżmy w rząd cztery karty czerwonej i cztery karty czarnej maści tak, żeby się barwy przeplatały: czerwona — czarna — czerwona — czarna i tak dalej. Po lewej stronie szeregu są dwa miejsca wolne. Na wolne miejsca można przenieść tylko dwie karty obok siebie leżące, nie zmieniając porządku, w jakim leżały; i tak samo na miejsce opróżnione po przesuniętych kartach można następnie znowu przenieść dwie karty sąsiadujące. Zadanie polega na tym, żeby w czterech poruszeniach przesuwając karty parami ułożyć je w ten sposób, by leżały koło siebie pod rząd cztery czarne, a za nimi cztery czerwone karty. (W braku kart mogą oczywiście do tego celu posłużyć różnej barwy krążki lub sztony).

Weźmy na przykład z talii kart cztery króle i cztery damy i ugrupujmy je, w opisany wyżej sposób, a mianowicie:



Pierwsze przesunięcie. Z lewej strony mamy dwa wolne miejsca; przesuniemy na nie króla pik i króla karo. Otrzymamy wówczas ugrupowanie następujące:



Drugie przesunięcie. Damę kierową i damę pikową przekładamy na wolne obecnie miejsca:



Trzecie przesunięcie. Przesuwamy króla karowego i damę karową:



Czwarte przesunięcie. Wreszcie przenosimy na wolne miejsca damę pikową oraz króla treflowego. W ten sposób zadanie zostało rozwiązane: otrzymaliśmy pod rząd cztery karty czarnej maści i cztery karty maści czerwonej, a zarazem skojarzyliśmy cztery pary małżeńskie:

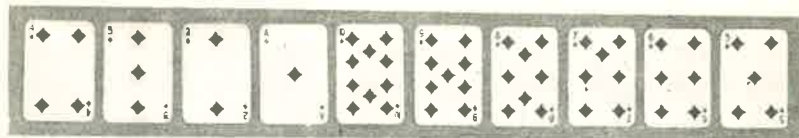


Jako ćwiczenie „rekapitulacyjne" można polecić, by czterema posunięciami Czytelnik przywrócił pierwotny układ kart.

Polecamy również jako interesujące ćwiczenia rozwiązanie podobnych zadań uwzględniając pięć par w pięciu przesunięciach albo sześć par w sześciu przesunięciach, albo siedem par w siedmiu ruchach — zawsze przenosząc równocześnie po dwie karty sąsiednie i zawsze bez zmiany ich wzajemnej pozycji.

3. Odgadnąć, ile kart przesunięto

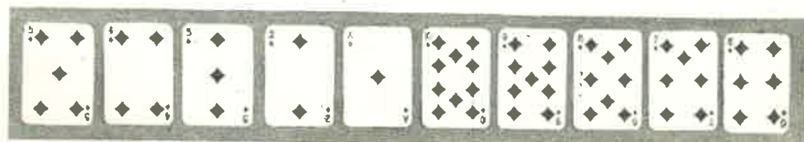
Dziesięć kart od asa do dziesiątki układa się rzędem maścią do spodu w taki na przykład sposób:



Odgadujący proponuje następnie, by gdy wyjdzie z pokoju, ktoś z obecnych przesunął dowolną ilość kart z końca prawego przed lewy, nie zmieniając jednak wzajemnego stosunku kart przesuwanych. Gdy to zostało dokonane, odgadujący powraca i od razu odkrywa kartę, której liczba oczek wskazuje ilość kart przesuniętych. Jak się to stać może?

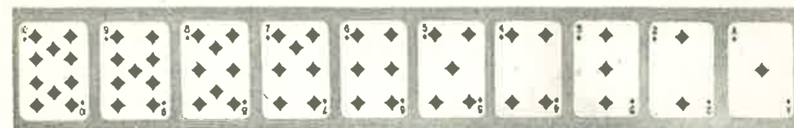
Odgadujący, który sam karty układał, wie, że pierwsza z lewej strony jest czwórka, odkrywa więc kartę piątą (4 + 1) od lewego końca i ta karta liczbą oczek rozstrzygnie, ile kart przesunięto.

Przypuśćmy, że przesunięto z prawej strony na lewą jedną tylko kartę; byłby więc szereg taki:



Otóż piąta karta od lewej strony wskaże rzeczywiście tylko jedno oczko. Pokazawszy zebranym owego asa i spojrzawszy nań, należy położyć go na miejscu. Równocześnie szybko obliczyć trzeba, że obecnie pierwszą kartą od lewej strony będzie piątka. Zgadujący raz jeszcze opuszcza pokój prosząc zebranych, by przesunęli znów dowolną liczbę kart (zawsze z prawej strony na lewą); wie przy tym z góry, że wróciwszy musi odkryć kartę szóstą (5 + 1) od lewej strony, a ilość oczek znowu wskaże liczbę kart przesuniętych.

Przypuśćmy, iż tym razem przesunięto pięć kart. Będzie więc taki układ szeregu:



Szóstą kartą będzie wtedy istotnie piątka. Jeżeli odgadujący chce eksperyment powtórzyć raz jeszcze, to zorientowawszy się, że na lewym krańcu jest obecnie dziesiątka musi za następnym powrotem odkryć pierwszą (0 + 1) kartę od lewej strony. Szereg powyższy układem swym od dziesiątki do asa wyjaśnia też zarazem całą tajemnicę owej „zdumiewającej zdolności odgadywania", która jest — jak widać — niesłychanie prosta.

4. Zgadnąć, ile oczek mieszczą trzy wybrane karty

Z pełnej talii, liczącej — jak wiadomo — 52 karty, niechaj ktoś z obecnych wybierze lub wyciągnie trzy, nie pokazując ich oczywiście odgadującemu. Następnie z pozostałych 49 kart niechaj dobierze do każdej wyciągniętej karty tyle sztuk, ile w każdej z tych trzech kart braknie oczek do piętnastu (licząc posiadane figury za dziesiątki).

Wówczas zgadujący zbiera resztę kart, chowa poza siebie i wnet oznajmia, jaka jest ogólna suma oczek w wyciągniętych trzech kartach. Dochodzi się do tego przez szybkie przeliczenie pozostałych kart i odjęcie czterech od liczby, jaka wypadnie.

Dla przykładu niech ktoś zatrzyma czwórkę, siódemkę i dziewiątkę. Wówczas do czwórki musi dodać 11 kart, do siódemki 8 kart i do dziewiątki 6 kart. W talii pozostaną 24 karty. Odejmując 4 od 24 otrzymuje się sumę oczek w trzech wziętych kartach: 20, co zgadza się z rzeczywistością, gdyż $4 + 7 + 9 = 20$.

Przypuśćmy teraz, że wybrane przez kogoś karty są to trzy najniższe, to jest trzy asy, które liczymy jako jedności. Wówczas oczywiste jest, że chcąc uzyskać liczbę 15 trzeba do każdej wziętej karty dodać jeszcze po 14 kart. Razem więc, łącznie z asami, kart odłożonych będzie 45, czyli w talii pozostanie tylko 7 kart. Jeśli więc od 7 odejmiemy 4, otrzymamy jako sumę oczek trzech wziętych kart liczbę 3.

Nietrudną jest rzeczą dowieść, że zawsze należy odjąć 4 od liczby pozostałych kart, żeby dowiedzieć się liczby oczek trzech kart wybranych.

Rzeczywiście, jeśli się wybierze zamiast asów trzy inne, wyższe karty, to o ile zwiększy się liczba ich oczek, o tyleż zmniejszy się liczba kart, które należy dodawać do każdej wybranej, żeby otrzymać liczbę 15, i o tyleż oczywiście zwiększy się znów liczba pozostałych kart. W ten sposób, odejmując od liczby pozostałych kart 4, otrzymamy resztę, która zawsze równać się będzie sumie oczek kart wybranych. Jeśli na przykład zamiast jednego asa weźmiemy szóstkę, to suma trzech wziętych kart (przypuszczając, że jako dwie inne karty pozostaną asy) będzie 8, to jest zwiększy się o 5. Lecz za to do szóstki dla otrzymania liczby 15, trzeba dodać nie 14, ale tylko 9 kart, to jest o 5 kart mniej; czyli ostateczna reszta całej talii zwiększy się o 5 kart i odejmując od tej reszty 4 otrzymamy znów dokładną sumę oczek wszystkich trzech kart wybranych.

5. Odgadnięcie wybranej pary kart

A. Należy rozłożyć na stole dwadzieścia kart parami. Niech każda z osób obecnych wybierze sobie jedną z par i dobrze zapamięta. Odgadujący zbiera karty w dowolnej kolejności — z tym tylko zastrzeżeniem, żeby par nie rozbijał.

Następnie układa je na stole w czterech rzędach po pięć kart, stosując się do liter czterech następujących wyrazów:

M	*U*	*T*	*U*	*S*
1	3	5	4	7
D	*E*	*D*	*I*	*T*
9	11	10	13	6
N	*O*	*M*	*E*	*N*
15	17	2	12	16
C	*O*	*C*	*I*	*S*
19	18	20	14	8

W czterech tych wyrazach, liczących ogółem 20 liter, każda litera zjawia się tylko dwa razy. Karty, zebrane — jak zaznaczyliśmy — parami, rozkłada się w ten sposób, iż pierwszą kładzie się na miejsce pierwszej litery pierwszego wyrazu, tj. na *M*; drugą na takąż literę *M*, która zajmuje trzecie miejsce w wyrazie trzecim; trzecia karta idzie na miejsce drugiej litery pierwszego wyrazu, to jest na *U*; czwarta z kolei na drugie *U* — i tak dalej według tej kolejności, jaką wskazują cyfry. Tym sposobem każda para kart znajdzie się na miejscu dwu jednakowych liter.

Jeśli więc teraz ktoś biorący udział w zabawie oświadczy, że z wybranej przezeń pary kart jedna znajduje się w drugim, a druga w trzecim rzędzie, to odgadujący wskaże mu natychmiast dwie karty zajmujące miejsca wspólnej litery tych obu rzędów, więc litery *E*. Gdy ktoś inny wskaże tylko rząd

czwarty jako ten, w którym znalazły się obie karty obranej przez niego pary, to oczywiście leżą one na miejscach litery *C*.

Mimo iż pomysł powyższy jest zdumiewająco prosty, dla ,,niewtajemniczonych'' sztuka ta, zręcznie przeprowadzona, należy do najefektowniejszych.

Dla wprawy można początkowo rozkładać karty na stole, na którym jest napisane owo czterowyrazowe zdanie łacińskie, i czynić to dopóty, dopóki nie osiągnie się takiej biegłości, że można będzie rozkładać karty bez ,,kombinowania''.

Nie trzeba chyba dodawać, że zamiast powyższych czterech wyrazów można samodzielnie obmyślić inne, polskie, liczące tyleż lub więcej liter.



Pewną, mniej znaną odmianą tego samego typu rozrywki jest rozkład 24 kart w formie ośmiu trójek i odnajdowanie ich za pomocą ułożenia w czterech rzędach po sześć kart według takiego klucza:

L A N A T A
L E V E T E
L I V I N I
N O V O T O



B. Na tej samej zasadzie, ale bez użycia klucza słownego, opiera się następujący sposób odszukania pary kart wśród 12, 20, 30 lub 42 kart, które to liczby są iloczynami dwu sąsiednich liczb naturalnych, mianowicie 3 · 4, 4 · 5, 5 · 6, 6 · 7.

Jak poprzednio, rozkładamy karty po dwie w kształcie kolumny, wachlarza lub inaczej. Prosimy, by obecni wybrali sobie po parze kart obok siebie leżących. Następnie zaś układamy z nich prostokąt w ten sposób: pierwsze trzy karty kładziemy pod rząd, czwartą pod pierwszą, piątą obok trzeciej, szóstą pod czwartą itd., dopóki liczba kart kładzionych jedna obok drugiej nie będzie równa większemu czynnikowi iloczynu. Podane tu tablice rozłożenia 20, 30 i 42 kart najlepiej rzecz tę zilustrują.

1	2	3	5	7
4	9	10	11	13
6	12	15	16	17
8	14	18	19	20

1	2	3	5	7	9
4	11	12	13	15	17
6	14	19	20	21	23
8	16	22	25	26	27
10	18	24	28	29	30

1	2	3	5	7	9	11
4	13	14	15	17	19	21
6	16	23	24	25	27	29
8	18	26	31	32	33	35
10	20	28	34	37	38	39
12	22	30	36	40	41	42

Pary nie rozbite, jak na przykład w pierwszym prostokącie: 1 — 2, 9 — 10, 15 — 16, 19 — 20, zwą się *kluczami*.

Gdy ktoś wskaże rzędy pierwszy i czwarty jako mieszczące karty wybranej przezeń pary, należy ich szukać: w pierwszym rzędzie — nad prawą kartą klucza czwartego rzędu (7), w czwartym — pod lewą kartą klucza pierwszego rzędu (8).

6. Jak odgadnąć jedną wybraną kartę

Spośród dość znacznej liczby różnych sposobów odgadnięcia jednej wybranej karty podajemy tu kilka odmian, przechodząc stopniowo od najłatwiejszych do nieco trudniejszych, ale trudniejszych nie tyle w wykonaniu, które jest zawsze niezmiernie łatwe, ile w uzasadnieniu.

A. Bezwzględnie najłatwiejszy sposób odszukania karty, którą ktoś wyciągnął i obejrzał, jest ten, jaki podaje Rockstroh w swym obfitym staroświeckim zbiorku różnych rozrywek pt. *Mechanemata*. Sposób ten polega na wybraniu z pełnej talii wszystkich tych kart, które w stosunku do imaginacyjnej linii poziomej, jaka by je przedzieliła na dwie połowy, są niesymetryczne. Takimi kartami będą: asy, trójki, piątki, szóstki, siódemki, ósemki i dziewiątki — pik, trefli i kierów. Wybrawszy te karty układa się je w jednym kierunku, np. tak, żeby wszystkie podstawy w pikach i treflach oraz ostrza w kierach były w oczkach niesymetrycznych skierowane ku dołowi.



Następnie przetasowawszy karty podaje się talię komuś z prośbą o wyciągnięcie jednej karty, obejrzenie jej i ponowne wsunięcie pomiędzy pozostałe karty. Równocześnie zaś w chwili, gdy ktoś ogląda kartę wyjętą, obraca się w ręku całą pozostałą kupkę kart tak, żeby wyciągnięta karta włożona została ze strony odwrotnej. Wówczas okaże się, że wśród wszystkich kart, których oczka niesymetryczne są zwrócone ku górze, znajdzie się owa wyciągnięta, jako jedyna leżąca w odwrotnym kierunku.

B. Drugi sposób opiera się na tej samej zasadzie, która stosowana była przy odnajdywaniu pary kart. Bierze się np. 16 dowolnych kart z talii i rozkłada się je w cztery rzędy po cztery karty w rzędzie. Proponuje się następnie, by ktoś wybrał sobie jedną z kart i wskazał, w którym rzędzie poziomym znajduje się wybrana karta.

Odgadujący dobrze sobie zapamiętać musi, jaka karta leży we wskazanym szeregu na lewym końcu. Przypuśćmy, że wskazano rząd trzeci od góry. Pierwszą od lewej ręki kartą tego rzędu jest walet karo.

Odgadujący zbiera karty tak, by ułożyły się na kupkę, jak poprzednio leżały, nie zaznaczając tego oczywiście, przeciwnie — starając się nadać pozór zupełnie dowolnego ich zbierania. Następnie rozkłada je ponownie, tym razem jednak nie rzędami, ale kolumnami. Karty ułożą się tak, jak wskazano na drugim rysunku:





Jeśli na ponowne zapytanie, w którym rzędzie obecnie znajduje się wybrana karta, odpowiedź brzmieć będzie na przykład: w drugim, to odgadujący od razu, bez wahania odpowiedzieć może, że tą kartą wybraną jest as trefl, on bowiem leży na przecięciu drugiego rzędu z kolumną rozpoczynającą się od waleta karo.

Oczywiście, że zarówno przy tym odgadnieniu, jak i przy następnych, lepiej jest nie dać od razu poznać po sobie, że kartę poszukiwaną już się odnalazło, lecz raz jeszcze zebrać karty, przetasować je, rozłożyć w dowolnym porządku i po namyśle lub jakichś dalszych jeszcze pomysłowych zabiegach wreszcie wskazać triumfalnie poszukiwaną kartę. Nadaje się przez to bardzo prostej sztuczce pozory wielce trudnych kombinacyj.

C. Piętnaście dowolnych kart rozkłada się w trzy rzędy. Niechaj ktoś z obecnych wybierze jedną z tych kart i wskaże rząd, w którym się ona znajduje. Zbierając karty należy zabiegać o to jedynie, by rząd mieszczący wybraną kartę znalazł się pośrodku dwóch innych. Następnie rozkłada się wszystkie karty w pięciu kolumnach po trzy karty. Znów dowiedzieć się należy, w którym rzędzie jest karta wybrana i powtórzyć raz jeszcze powyższą manipulację. Karta wybrana znajdzie się tym razem nieodzownie pośrodku rzędu wskazanego.

Jakim się to dzieje sposobem? Bardzo prostym:

Oznaczmy karty rzędu, w którym znajduje się wybrana karta, przez I, karty dwu innych rzędów przez o. Gdy rząd z kartą wybraną znajdzie się pomiędzy dwoma pozostałymi, będziemy mieli takie rozłożenie:

o o o o o
I I I I I
o o o o o

Gdy następnie ułożymy karty w pięciu kolumnach, otrzymamy układ:

o	o	I	I	o
o	o	I	o	o
o	I	I	o	o

Jeśli wskazany będzie tym razem rząd drugi jako ten, w którym wybrana karta się mieści, to nie ma właściwie potrzeby rozkładania kart po raz trzeci: można od razu wskazać kartę środkową jako wybraną.

Jeśli zaś ktoś wskaże na przykład rząd pierwszy, to umieszczając go pomiędzy drugim i trzecim i zastępując w nim jedynkę (I) dwójką (II) otrzymamy za trzecim rozkładem taki porządek:

o	o	o	o	I
o	o	II	o	o
I	o	II	I	o

Widzimy tedy, że obie dwójki (II) znajdą się nieodzownie pośrodku dwu rzędów. Takie samo będzie postępowanie, gdy zamiast pierwszego wskazany będzie za drugim razem rząd trzeci.

Gdy raz jeszcze zbierzemy karty w powyżej podany sposób i rozłożymy je po raz trzeci w kolumny, to nie będziemy już potrzebowali zapytywać, w którym rzędzie znajduje się wybrana karta, gdyż będzie ona na pewno znajdowała się w samym środku prostokąta.

D. Zamiast piętnastu kart, można wziąć 21 i rozkładając je powoli na trzy kupki maścią do góry prosić, by ktoś w tym czasie wybrał sobie jedną z kart i wskazał, w której padła kupce. Tę kupkę kładzie się pomiędzy dwie pozostałe. Powtórzywszy manipulację powyższą jeszcze dwukrotnie doprowadza się wybraną kartę na miejsce 11, to znaczy w sam środek wszystkich kart.



Uogólnienie. Ten ciekawy rodzaj odgadnienia można uogólnić. Niechaj a oznacza liczbę kart w każdej kupce (lub kolumnie), b — ilość kupek. Przypuśćmy, że karta wybrana znajdować się będzie w kolumnie środkowej. Przy następnym rozłożeniu liczba a kart tej kolumny środkowej ułoży się w b kolumnach i jeśli a dzielone przez b daje w ilorazie liczbę całkowitą c, to karty, wśród których znajduje się karta wybrana, ułożą się w każdej z b kolumn w równej liczbie, tworząc pośrodku jej grupę z c kart.

Na przykład przy 27 kartach będziemy mieli:

Pierwsze rozłożenie			Drugie rozłożenie		
o	I	o	o	o	o
o	I	o	o	o	o
o	I	o	o	o	o
o	I	o	I	I	I
o	I	o	I	I	I
o	I	o	I	I	I
o	I	o	o	o	o
o	I	o	o	o	o
o	I	o	o	o	o

To samo otrzymamy przy większej ilości kart, jeśli tylko c dzieli się z kolei przez b, jak również jeśli nowy iloraz d dzieli się przez b i tak dalej. Zawsze więc możemy doprowadzić kartę wybraną do środkowego miejsca środkowej kolumny. Rozkładać zaś karty należy dopóty, dopóki otrzymany z dzielenia przez b iloraz nie będzie równał się jedności.

Nawet jeśli a nie dzieli się przez b bez reszty, można osiągnąć rezultat pożądany stosując odpowiednią ilość rozłożeń.

Pierwsze rozłożenie					Drugie rozłożenie					Trzecie rozłożenie				
o	o	I	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	I
o	o	I	o	o	o	o	o	o	o	I	o	o	o	o
o	o	I	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	I	o
o	o	I	o	o	o	o	o	I	I	o	o	o	o	o
o	o	I	o	o	I	I	I	I	I	o	o	II	II	o
o	o	I	o	o	I	I	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o	I	o	o	o	o	o	o	o	I	I	o	o	o
o	o	I	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	I
o	o	I	o	o	o	o	o	o	o	I	o	o	o	o

Niechaj na przykład będzie $a = 5$, $b = 9$. Przypuśćmy, że przy drugim rozłożeniu wybrana karta znajdzie się w drugiej kolumnie, przy rozłożeniu trzecim dwie karty, z których jedna jest wybraną, znajdą się już pośrodku kolumn: jedna — pośrodku kolumny trzeciej, druga — pośrodku kolumny czwartej od lewej strony. Skoro więc po trzecim rozłożeniu wskazana zostanie kolumna, w której się znajduje poszukiwana karta, będzie ona właściwie już odszukana.

Na podstawie tych uwag ogólnych nietrudno dokonać wielu samodzielnych ciekawych kombinacyj, do których najgoręcej zachęcamy.

7. Jak można z góry zapowiedzieć miejsce, na którym znajdzie się karta wybrana

A. Preferansową talię, złożoną z 32 kart, podaje się komuś z obecnych prosząc, by wybrał sobie kartę i zapamiętał (nie wypowiadając tego głośno), na którym miejscu, licząc od spodu talii, znajduje się upatrzona karta.

Otrzymawszy talię z powrotem chowa się ją poza siebie i śmiało zapowiada, że wybrana karta znajdzie się na przykład na miejscu dwudziestym: równocześnie zaś szybko odlicza się i przenosi 20 kart ze spodu na wierzch talii. Następnie wręcza się talię ponownie temu, kto dokonał wyboru, i teraz dopiero prosi się o wymienienie, na którym miejscu wybrana karta się znajdowała.

Jeśli wymieniona zostanie liczba mniejsza niż 20, np. 15, to znaczy, że karta wybrana przeszła obecnie na wierzch talii i ponad nią leży jeszcze 5 kart ($20 - 15$), ona zaś sama zajmuje więc miejsce szóste ($20 - 15 + 1$). Należy wtedy polecić, by wybierający karty przełożył z dołu na wierzch talii ($15 - 1$) czternaście kart i liczył od wierzchu: znajdzie wówczas niewątpliwie kartę przez siebie wybraną na zapowiedzianym przez odgadującego miejscu dwudziestym.

Gdy wymieniona zostanie liczba większa niż 20, na przykład 25, to znaczy, iż początkowo karta wybrana leżała od wierzchu talii na miejscu ($32 - 25 + 1$), obecnie zaś znajduje się na miejscu ($33 + 20 - 25$), czyli na 28. Należy więc polecić, by wybierający przełożył z wierzchu talii na jej spód 8 kart ($33 - 25$) i szukał potem swej karty na zapowiedzianym miejscu dwudziestym.

Uogólnienie. Przez a oznaczamy miejsce, na którym wybrana karta początkowo się znajdowała, przez b — miejsce zapowiedziane, na którym ma się znaleźć. Odgadujący powinien niepostrzeżenie przełożyć ze spodu na wierzch b kart, a następnie zapytać o a. Jeśli $a < b$, to należy polecić, by przeniesiono na wierzch $a - 1$ kartę; jeśli $a > b$, to trzeba będzie przenieść z wierzchu na spód $33 - a$ kart. Wówczas karta wybrana znajdzie się na pewno na miejscu b od wierzchu talii.

B. Bierze się 27 kart i rozkłada się je z wolna na trzy kupki. W trakcie tego ktoś z obecnych obiera sobie jedną z kart i wskazuje, w której znalazła się kupce. Tę manipulację powtarza się jeszcze dwa razy. Wiemy już na podstawie tego, co poprzednio było powiedziane, że jeśli kupkę, w której znajduje się karta, kłaść będziemy za każdym razem pomiędzy dwie inne, czyli na miejscu drugim, to karta wybrana znajdzie się po trzykrotnym rozłożeniu pośrodku wszystkich kart, czyli na miejscu 14.



Powstaje jednak pytanie: w jakim porządku należy kupki układać, jeśli się pragnie odnaleźć kartę wybraną nie na miejscu 14, lecz na jakimś innym, uprzednio zapowiedzianym?

Niechaj litery a, b, c oznaczają kolejne miejsca, na których kładzie się kupkę mieszczącą wybraną kartę. Innymi słowy: a oznacza miejsce, na którym kładzie się kupkę z wybraną kartą po pierwszym rozłożeniu, b — po drugim rozłożeniu, c — po trzecim.

Otóż przy powtórnym rozłożeniu przed kupką, która mieści wybraną kartę, wypadnie $a - 1$ kupek, każda kupka z 9 kart, a to przy rozkładaniu na trzy nowe kupki daje po $3(a - 1)$ kart w każdej nowej kupce; po czym dopiero iść będą karty z owej kupki zawierającej kartę wybraną i do każdej formującej się nowej kupki dojdzie ich 3. Gdy więc teraz powtórnie ktoś określi kupkę, w której znajduje się ta wybrana przezeń karta, to karta owa będzie jedną z trzech ostatnich z liczby $3(a - 1) + 3$, czyli $3a$ kart.

Kupki te znów się zbiera i wskazaną kupkę umieszcza się na miejscu b; za trzecim razem — na miejscu c. Otóż rozumując w ten sam, co wyżej, sposób dochodzi się ostatecznie do formułki

$$R = 9(c - 1) + 3(b - 1) + a,$$

gdzie R oznacza miejsce, na którym ostatecznie znajduje się wybrana karta. Jeśli ustalimy sobie poprzednio a, b i c, to R odnajdziemy oczywiście bez żadnych trudności.

Nieco trudniejsza jest czynność odwrotna, czyli odnalezienie a, b i c, gdy R jest z góry ustalone, to znaczy, gdy postanowiło się uprzednio, że karta wybrana ma się znaleźć na miejscu z góry wskazanym.

Wówczas liczbę $R - 1$ dzielimy przez 3, reszta z dzielenia powiększona o 1 da nam liczbę a. Iloraz z poprzedniego dzielenia znowu dzielimy przez 3 i reszta powiększona o 1 da nam liczbę b, a nowy iloraz powiększony o 1 da liczbę c.

Przykład 1°. Chcemy, żeby wybrana karta zajęła miejsce 11.

Mamy $R = 11$, $R - 1 = 10$. Dzielenie $10 : 3$ daje iloraz 3 i resztę 1, a więc $a = 2$. Iloraz 3 dzielimy znowu przez 3; otrzymujemy nowy iloraz 1 i resztę 0, a więc $b = 1$ i $c = 2$. Ostatecznie: $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$.

Przykład 2°. Wybrana karta ma się znaleźć na miejscu 9.

Mamy $R = 9$, $R - 1 = 8$. Dzielenie $8 : 3$ daje iloraz 2 i resztę 2, a więc $a = 3$. Dzielenie $2 : 3$ daje z kolei iloraz 0 i resztę 2, a więc $b = 3$ i $c = 1$. Ostatecznie $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$.

Wywody powyższe dają możność stwarzania niezmiernie efektownych, popisowych wprost odgadnień, zwłaszcza gdy odgadujący dojdzie do wprawy w szybkim pamięciowym odnajdowaniu liczb a, b, c i śmiało zapowie obecnym, że gotów jest na każdym zadanym mu przez kogoś miejscu odnaleźć kartę wybraną przez kogoś innego z obecnych. Po trzecim zebraniu kupek wręcza odgadujący całą paczkę kart osobie, która określiła miejsce, i prosi, by sama zechciała karty przeliczyć i wraz z tym, kto wybrał kartę, sprawdzić, czy zadanie spełnione zostało w całej rozciągłości.



DOMINO

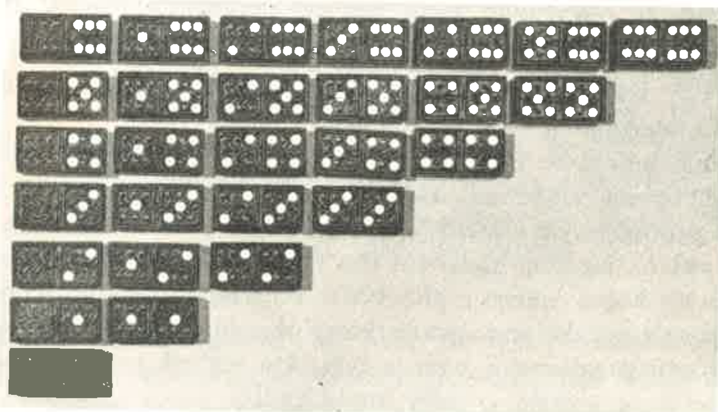
UWAGI OGÓLNE

Wszyscy chyba Czytelnicy, jeśli nie grali, to przynajmniej słyszeli o grze domino. Składa się ona z prostokątnych, wydłużonych płytek, tak zwanych *kamieni*, których długość jest zwykle dwa razy większa od szerokości. Każda płytka podzielona jest na dwa kwadraciki, czyli pola z pewną ilością oczek domina.

Gra zazwyczaj składa się z 28 kamieni, na których znajduje się 8 pól pustych (są to tak zwane *mydła*), 8 jedynek (czyli *asów*), 8 dwójek, 8 trójek, 8 czwórek, 8 piątek i 8 szóstek.

Jeśli ilość zaznaczonych punktów na obu połówkach kamienia jest taka sama, to kamień taki nazywamy *dubletem*.

Oto tablica wszystkich kamieni gry zwyczajnej:



Takie domino z najwyższym kamieniem 6 — 6 używane jest powszechnie we Francji, we Włoszech, w Polsce. Natomiast w innych krajach spotyka się domina o większej liczbie oczek, a — co za tym idzie — większej liczbie kamieni; tak na przykład w Rosji grywają nieraz w domino 7 — 7, w Anglii i w Niemczech 8 — 8, w Szwecji 9 — 9, a wyrabiane są też komplety dochodzące do 12 — 12.

O pochodzeniu gry tej i czasie jej powstania nic pewnego powiedzieć nie można. Niejednokrotnie przez nas wymieniany wybitny matematyk angielski Rouse Ball sądzi, iż znana ona była starożytnym Grekom, Hebrajczykom i Chińczykom, w Europie zaś rozpowszechniła się w połowie XVIII stulecia.

Chociaż okres najżywszego zainteresowania dominem już dawno przeminął, gra ta nie podzieliła losu wielu gier innych, które po wyjściu z mody zanikały zupełnie. Przeciwnie, na wzór szachów i kart ma ona cechy pewnej jakby „nieśmiertelności", odradza się w każdym pokoleniu, a choć nie jest już tak powszechnie uwielbiana, jak była niegdyś, i dziś jeszcze znajduje wielu gorących zwolenników. Oto jeden z nich takie wystawia jej słuszne świadectwo:

„Gra w domino, sądzona powierzchownie, wydać się może mało wytworną; jej prostota nie każdego usposabia przychylnie; tym milszego jednak doznaje się zdziwienia, gdy przy bliższym zetknięciu odnajduje się w niej wiele ciekawych kombinacyj i głębszych powiązań. Można by porównać domino ze skromnym uczonym, którego zasług zrazu nie dostrzegamy, gdy go atoli poznamy bliżej, cenimy i kochamy szczerze. Jest w grze tej — jak w szachach — jakiś pierwiastek szlachetności: nie nadaje się do hazardu, nie podsyca chciwości, żyje dla honoru i honor jest dla niej wszystkim!"





1. Kilka zwykłych sposobów gry w domino

A. Dwie, trzy lub cztery osoby ciągną ze wszystkich kamieni, obróconych oczkami do spodu, po jednym kamieniu, by ustalić, kto grę rozpocznie. Rozpoczyna zazwyczaj ten, kto wyciągnął kamień o największej ilości oczek. Następnie gracze ponownie mieszają wszystkie kamienie i rozbierają pomiędzy siebie po pewnej, równej ich liczbie, nie większej zwykle niż 7. Pozostałe kamienie służą do późniejszego dobierania, czyli tak zwanego *dokupu* lub *połowu*.

Gracz rozpoczynający grę wykłada kamień dowolny; jeśli posiada kamień podwójny, to wykłada go, aby następnemu graczowi utrudnić dostawienie dalszego kamienia i samemu pozbyć się „dubletu". Drugi gracz, siedzący po lewej stronie pierwszego, musi z kolei przystawić do jednej z połówek pierwszego kamienia kamień z takąż liczbą oczek w jednej połowie; trzeci gracz dostawia kamień do jednego lub drugiego końca dwu złączonych kamieni poprzednich, również na tejże zasadzie równej liczby oczek w przytkniętym kwadraciku — i tak dalej.

Gdy który z graczy nie znajduje wśród posiadanych przez siebie kamieni odpowiedniej liczby oczek, musi *ciągnąć*, czyli *łowić* z kamieni pozostałych na stole dopóty, dopóki nie wyłowi potrzebnego mu kamienia. Gdy zapas się wyczerpie, a odpowiedniego kamienia dany gracz nie ma, wówczas *pasuje*; następny gracz wykłada potrzebny kamień, jeśli go oczywiście wśród swych kamieni znajdzie. Wygrywa ten, kto najpierw wyłoży wszystkie swe kamienie, a wygraną oblicza się według liczby oczek w kamieniach pozostałych u reszty partnerów.

Prócz zakończenia gry na skutek pełnego wyłożenia wszystkich kamieni przez jednego z graczy, można grę przerwać przez tak zwane *zamknięcie gry*. Na czym to zamknięcie polega, przykład najlepiej wyjaśni:

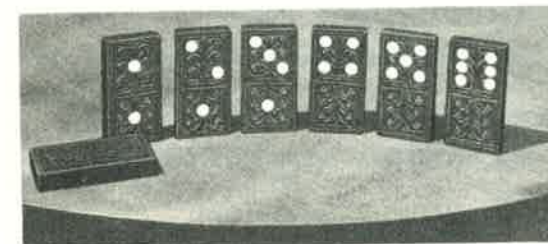
Przypuśćmy, że jeden z graczy zauważył, iż na stole w szeregu zakończonym z jednej strony polem 5, z drugiej polem 2 leży sześć kamieni z piątkami, on zaś wśród swych kamieni ma kamień 2 — 5, a więc ostatni z piątką; przystawiając go do 2 uniemożliwi dalszą grę, gdyż szereg będzie się kończył z obu stron piątką, a nikt już piątki nie ma. Gra będzie zamknięta. Wygrywa wówczas ten gracz, u którego pozostanie najmniej oczek.

Jako przykład pełnej rozgrywki — aż do wyczerpania wszystkich kamieni jednego gracza — przytoczymy niezmiernie ciekawy przebieg rozgrywki, zwanej *największy cios*, w której gracz rozpoczynający grę wykłada wszystkie swe siedem kamieni, gdy tymczasem drugi i trzeci gracz nie mogą położyć ani jednego kamienia.

Przypuśćmy, że pierwszy gracz ma takie kamienie:



czwarty zaś gracz otrzymał pozostałe asy i mydła oraz siódmy kamień jakikolwiek:



Reszta kamieni przypada oczywiście drugiemu i trzeciemu graczowi.

Gracz pierwszy, rozpoczynający grę, stawia 0 — 0. Gracze drugi i trzeci pasują, albo — jak się zwykło mówić *dąsają się*, gdyż nic przystawić nie mogą, czwarty natomiast dokłada jedno z posiadanych przez siebie mydeł: 0 — 4, 0 — 5 lub 0 — 6. Wówczas pierwszy kładzie 4 — 1, 5 — 1 lub 6 — 1, wskutek czego dwaj niefortunni gracze (drugi i trzeci) znowu się dąsają, czwarty zaś kładzie 1 — 1, 1 — 2 lub 1 — 3. Na co pierwszy odpowiada kamieniem 1 — 0, 2 — 0 lub 3 — 0 i tak dalej. W ten sposób pierwszy gracz wyłoży wszystkie kamienie i wygra, czwarty gracz zostanie z jednym kamieniem, a gracze drugi i trzeci zostaną ze wszystkimi siedmiu kamieniami, żadnego z nich nie wyłożywszy!

Ile gracz pierwszy wygra? — Suma oczek w 13 położonych kamieniach wynosi 48, wszystkich zaś oczek zwykły komplet domina liczy 168; wygrana więc wyniesie 120 oczek. — I to jest „największy cios".

Można oczywiście ułożyć podobne rozgrywki z innych kamieni, większej jednak liczby oczek wygrywający nie może osiągnąć.

Warto też odnaleźć największy cios przy partii we trzy osoby, które rozbiorą po 9 kamieni, oraz we dwie osoby, gdy rozbiorą po 14 kamieni.



B. Oto drugi sposób gry w domino. Dwaj gracze ciągną po 7 kamieni, następnie z pozostałych losują, kto zaczyna. Przebieg gry jest taki sam, jak wyżej — z tą jednak różnicą, iż bądź nie stosuje się wcale połowu, bądź się go ogranicza.

W pierwszym przypadku gracz nie mający potrzebnego kamienia dąsa się tylko — i prawo dalszego ruchu przechodzi na przeciwnika. Rozgrywka ciągnie się dopóty, dopóki choć jeden z graczy może dostawiać z posiadanych przez siebie od początku kamieni, wygrywa zaś ten, komu pozostanie mniejsza ilość oczek. Wygrana równa się różnicy oczek w pozostałych u obu graczy kamieniach albo liczbie oczek w kamieniach przegrywającego. Gra toczy się zazwyczaj przez szereg rozgrywek, aż jeden z przeciwników dojdzie do umówionej z góry puli, wynoszącej 50, 100 lub więcej punktów.

Jeśli gracze stosują połów ograniczony, to gracz nie mający potrzebnego kamienia łowi go wśród pozostałych w rezerwie, ciągnąc jednak za każdym razem nie więcej nad jeden albo dwa kamienie.

C. W grze bierze udział czterech graczy podzielonych na dwie partie, przy czym partnerzy siadają albo naprzeciw siebie, jak to się dzieje przy kartach, albo obok siebie, co czyni grę bardziej urozmaiconą, gdyż partnerzy mogą się łatwiej wzajemnie popierać. Każdy gracz bierze po 6 kamieni, a 4 kamienie pozostają w rezerwie. Losuje się, która partia rozpoczyna grę, po czym partnerzy porozumiewają się, kto z nich pierwszy położy kamień. Gracz nie mający potrzebnego kamienia nie jest obowiązany brać dokupu, jeśli siedzi przy nim jego partner, na którego przypada kolej ruchu. Gdy jednak i temu drugiemu graczowi zabraknie odpowiedniego kamienia, musi łowić, póki rezerwy starczy. Wygrywa ta partia, w której choć jeden gracz wyłoży pierwszy wszystkie swe kamienie. Jeśli gra nie została zakończona, lecz zamknięta, wówczas ta partia wygrywa, która w pozostałych kamieniach mniej ma oczek, i wygraną stanowi — zależnie od umowy — albo różnica liczby oczek, albo pełna liczba oczek partii przegrywającej.

Jeśli któraś z partyj dochodzi do puli jednym ciągiem, choć nie od pierwszej rozgrywki, pula liczy się wówczas podwójnie; jeśli zaś dochodzi jednym ciągiem i od pierwszej rozgrywki, to pulę liczy się potrójnie.

D. Gra dwóch, trzech lub czterech graczy, rozbierających pomiędzy siebie od razu wszystkie kamienie lub (przy trzech graczach) wszystkie bez jednego. Zasada przystawiania kamieni jest taka sama, jak w poprzednich odmianach, cel jednak zupełnie przeciwny: chodzi mianowicie nie o wyzbycie się kamieni lub zostawienie u siebie najmniejszej ilości oczek, lecz o posiadanie w chwili obliczania największej możliwej ich liczby. A więc wykładać należy jak najwięcej mydeł, asów, dwójek, zachowując do ostatniej chwili kamienie o wyższej liczbie oczek. Dążyć należy również do rychłego, ale w dogodnym dla siebie momencie — zamknięcia gry. Wygrywa ten, kto ma największą ilość oczek. Wygraną stanowi bądź liczba oczek w kamieniach wygrywającego, bądź też suma wszystkich oczek w kamieniach pozostałych u wszystkich graczy.



Prócz powyższych czterech zwykłych sposobów gry w domino jest wiele innych jeszcze odmian różniących się pewnymi właściwościami nie tylko w różnych krajach, ale i w różnych okolicach tegoż kraju.

Zwykłymi sposobami nazywamy opisane warianty dlatego, że wspólna jest im wszystkim zasada przystawiania zawsze równej liczby oczek do jednego z końców wyłożonego pierwszego kamienia lub całego szeregu.

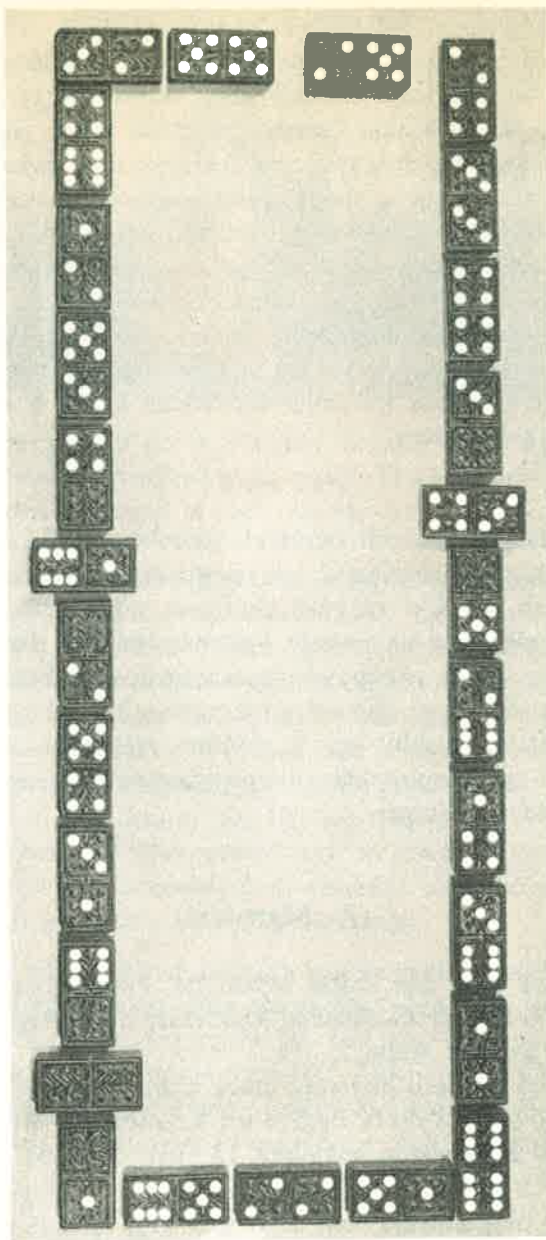
Są jednak pewne sposoby gry w domino *niezwykłe*, zasady powyższej nie uznające. Z tych najbardziej interesujące są dwa poniżej omówione, mianowicie *Matador* i *Muggins*.

2. Matador

Gra polega na tym, by liczba oczek na kwadraciku przystawionym, łącznie z liczbą oczek na kwadraciku kamienia, do którego się przystawia, dawała w sumie zawsze liczbę 7.

Więc na przykład, jeśli pierwszy gracz wyłoży kamień 4 — 5, następny powinien dosunąć bądź 2 do 5, bądź 3 do 4. Liczbę 7 otrzymuje się oczywiście łatwo przy zestawieniu wszelkich kamieni od 1 do 6; ale w grze są również kamienie z pustymi kwadracikami, z którymi nigdy liczby 7 osiągnąć nie można. Aby owe „mydła" nie zamykały gry, istnieją cztery tak zwane *matadory*, posiadające moc ponownego otwarcia gry i wprowadzenia mydeł do gry. W grze zwyczajnej, obejmującej 28 kamieni, matadorami są kamienie:





Jeśli się przyjmie, że po pustym polu można wyłożyć matadora i że po nim kładzie się również pusty kwadracik, to w rezultacie z 28 kamieni domina utworzyć można łańcuch przedstawiony powyżej lub inny, jemu pokrewny.

Przy rozgrywce nigdy oczywiście nie dochodzi do ułożenia takiego pełnego prostokąta, gdyż gra się kończy, gdy jeden z graczy wyłoży swe kamienie lub grę zamknie.

Prawidła gry są następujące: bierze w niej udział zazwyczaj dwóch graczy, ale może grać również trzech i nawet czterech. Ten, kto wyciągnie największy kamień, rozpoczyna grę. Każdy z graczy bierze po 3 kamienie; reszta tworzy rezerwę. Rozpoczynający grę wykłada dowolny pierwszy kamień, a następny gracz powinien dostawić drugi kamień według zasady, wskazanej powyżej, by osiągnąć liczbę 7. Jeśli gracz ten nie ma odpowiedniego kamienia, może przystawić matadora albo też musi łowić w rezerwie, dopóki nie natrafi na kamień z pożądaną liczbą oczek lub na matadora.

Matadora umieszczać można, gdzie się żywnie podoba. Przystawiać jednak do matadora pole puste można wtedy tylko, gdy położony on został również za kwadracikiem pustym, albo gdy jest to matador 0 — 0. Jeżeli matadora umieszczono za kamieniem z oczkami, to następny gracz powinien do jednego z pól matadora dostawić kamień na stale obowiązującej zasadzie dopełnienia sumy oczek tego pola do 7.

Kto kładzie matadora nie dla otwarcia gry zamkniętej przez mydło, lecz z braku innego kamienia (do czego zresztą nie jest obowiązany), może według swego uznania bądź wstawić go w poprzek, jak to jest pokazane na rysunku, bądź wzdłuż — przez co zmniejsza szanse przeciwnika, gdyż ten nie może wtedy dostawiać kamienia według własnego uznania do dowolnego pola matadora, lecz do tego tylko pola, które jest na końcu.

Posiadanie matadora jest niezbędne do otwarcia gry zamkniętej przez mydło. Prawo grania matadorem jest tak szerokie, że można nawet jednego matadora pokrywać innym. Dozwolone jest też zatrzymywanie matadora, by zabezpieczyć się przed zamknięciem gry przez przeciwnika; wolno też samemu grę zamknąć w korzystnym dla siebie momencie i nie otworzyć jej pomimo posiadania matadora.

Wygrywa ten, kto bądź wyłoży wszystkie swe kamienie, bądź po zamknięciu gry będzie miał najmniejszą ilość oczek. Zazwyczaj jedna partia ciągnie się przez kilka rozgrywek, aż do chwili osiągnięcia puli 100 lub 150 punktów. Przebieg gry jest taki sam, jak w zwykłej grze w domino.

W celu urozmaicenia można jeszcze oczywiście wprowadzić pewne z góry ustalone zastrzeżenia. Na przykład wprowadza się prawidło, że wolno dostawiać kamienie z jednej tylko strony: bądź tylko z prawej, bądź tylko z lewej. Innym skomplikowaniem gry będzie warunek, że każdy z graczy za każdym razem musi dostawiać po obu stronach kamienia czy też szeregu kamieni.

A oto kilka praktycznych wskazówek:

Ponieważ do mydła dostawiony być może jedynie matador, gracz powinien dążyć do tego, by zmusić przeciwnika do grania na owych pustych polach, przez co zmniejszy jego szanse posiadania matadora przy końcu gry.

Jeśli z przebiegu gry można wnosić, że przeciwnik posiada mydła, należy jak najdłużej przeszkadzać mu w ich wyłożeniu. Samemu — jeśli się nie chce zamknąć gry — należy wtedy tylko wykładać mydło, gdy się jest w posiadaniu matadora.



3. Muggins

Ten wariant gry w domino jest szczególnie rozpowszechniony w Anglii. Wymaga on pewnej sprawności w obliczaniu.

W grze mogą brać udział dwie, trzy lub cztery osoby. Wszyscy gracze ciągną jednakową ilość kamieni, byleby w rezerwie pozostały przynajmniej dwa kamienie, a każdy z graczy nie miał ich więcej niż siedem.

Po wylosowaniu, kto rozpoczyna pierwszą rozgrywkę, należy przemieszać kamienie i posługiwać się nimi podobnie, jak w innych grach w domino.

Zasada Mugginsa polega na dostawianiu kamieni w ten sposób, by suma oczek na obu końcach szeregu wynosiła 5 lub była wielokrotnością liczby 5.

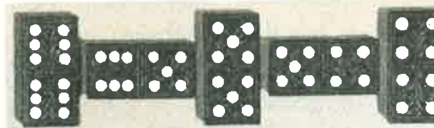
Podwójne kamienie kładzie się poprzecznie, przy czym położenie takie w tej grze jest ściśle obowiązujące, a nie dowolne, jak było w Matadorze. Dlaczego — wyjaśni to przykład podany niżej.

Każda piątka, którą gracz osiągnie przy wykładaniu kamienia według zasad gry, liczy się za jeden punkt wygranej. Wygrywa zazwyczaj gracz, który pierwszy zdobędzie 31 punktów.

Każdy gracz po kolei ma prawo do rozpoczęcia dalszych rozgrywek, przy czym kolejność przechodzi w kierunku wskazówek zegara.

Oto przykład rozgrywki:

Pierwszy gracz rozpoczyna grę podwójną piątką, za co zapisuje sobie 2 punkty. Jest to kamień najlepszy dla gracza, który grę ma rozpocząć, gdyż nie tylko daje mu prawo do 2 punktów, ale jednocześnie uniemożliwia zyskanie punktów następnemu graczowi, chyba że ten posiada podwójne „mydło".



Przypuśćmy dalej, że drugi gracz może wyłożyć jedynie kamień 5 — 6; wówczas oba wolne krańce utworzą łącznie $10 + 6 = 16$, czyli liczbę niepodzielną przez 5, a więc gracz ów nie będzie miał nic do notowania.

Następnie przystawiony kamień jest 4 — 5, po prawej stronie pierwszego. Posiadacz tego kamienia zapisuje sobie 2 punkty, gdyż ilość oczek na polach wysuniętych wynosi w sumie $6 + 4 = 10$, czyli 2 razy po 5.

Następny gracz, nie posiadający 4, zmuszony jest wyłożyć podwójną szóstkę (poprzecznie): lecz to nie przysporzy mu pożądanych punktów, gdyż suma oczek $2 \cdot 6 + 4 = 16$ nie dzieli się przez 5.

Natomiast prawdziwym szczęśliwcem będzie jego następca, który posiada podwójną czwórkę. Kładzie ją według prawideł gry pionowo, przez co na tym końcu otrzyma 8 oczek, a że na przeciwnym końcu jest 12 oczek, więc w sumie osiągnie liczbę 20. Zapisuje więc 4 punkty wygranej; jest to najwyższa liczba punktów wygranych za jednym pociągnięciem.

Każda rozgrywka ciągnie się do wyłożenia wszystkich kamieni, cała zaś gra — do chwili osiągnięcia przez jednego z graczy umówionej puli 31, 51 lub więcej punktów. Każde dostawienie do 5 lub do wielokrotności liczby 5 powinno być przez gracza zameldowane.



Ciekawą odmianę Mugginsa osiągnie się przez przyjęcie zasady, żeby suma oczek na obu końcach szeregu wynosiła 3 albo wielokrotność liczby 3.

Trójkę otrzymuje się z kombinacji podwójnego asa z asem lub połączenia mydła z trójką. Największą liczbą punktów, które można zdobyć za jednym posunięciem, jest 6: na jednym końcu musi wówczas figurować podwójna szóstka, a na drugim bądź szóstka, bądź podwójna trójka.

Poza tym przebieg gry jest zupełnie taki sam, jak wyżej.



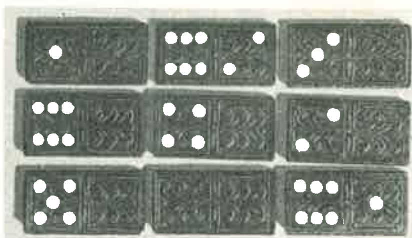
4. Domino magiczne

Z pewnej ilości kamieni lub ze wszystkich kamieni domina układać można bardzo ciekawe kwadraty magiczne.

A. *Kwadraty dziewięciopolowe* mogą się stać okazją do ułożenia zadania tej treści:

Do siedmiu kamieni z mydłami dobrać jeszcze takie dwa kamienie, żeby można było ułożyć kwadrat magiczny, w którym suma wszystkich oczek kamieni leżących w kolumnach, w szeregach i na przekątnych wyraża się tą samą liczbą.

Podajemy rozwiązanie: do kamieni z mydłami dobrane zostały kamienie 1 — 6 i 2 — 6; suma magiczna wynosi 12.



Jakie kamienie trzeba dobrać i jak ułożyć kwadrat magiczny, gdy zamiast 7 mydeł weźmiemy 7 asów albo 7 dwójek? Jakie będą w każdym z tych kwadratów sumy magiczne? Czy można ułożyć taki kwadrat magiczny z 7 piątek lub 7 szóstek?

B. *Kwadrat szesnastopolowy* da okazję do podobnych zadań, tylko bardziej skomplikowanych:

Mając wszystkie mydła i asy dobrać jeszcze takie trzy kamienie, żeby można było ułożyć kwadrat magiczny.

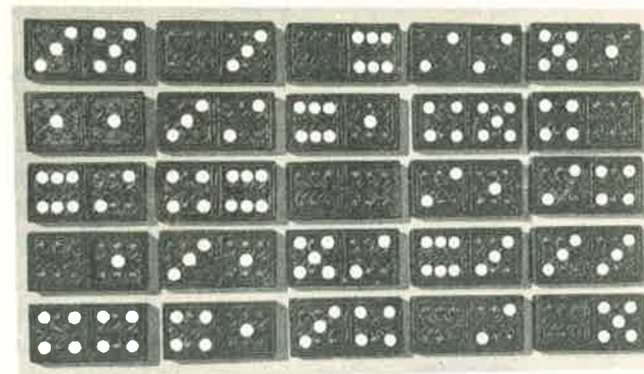
Podajemy rozwiązanie: suma magiczna 18, kamienie dobrane: 2 — 5, 2 — 6, 3 — 6.



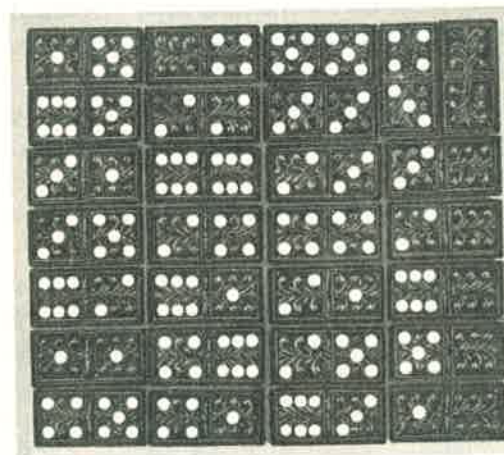
Zechciejcie w tym kwadracie magicznym przełożyć pierwszą kolumnę na ostatnie miejsce albo pierwszy szereg na spód, a przekonacie się o dziwnej właściwości tego kwadratu — tej mianowicie, że nie przestanie on być kwadratem magicznym.

I znów pokusa do układania takich samych kwadratów z kamieni o wyższej liczbie oczek. Warto spróbować!

C. *Kwadraty dwudziestopięciopolowe.* Poniżej podajemy kwadrat magiczny z 25 kamieni, z którym wiążą się pytania: Które trzy kamienie należało odrzucić? Czy nie można odrzucić innych? Jakich można dokonać przestawień bez zatraty magiczności kwadratu?



D. *Kwadrat magiczny ze wszystkich kamieni.* Jest to bez wątpienia najciekawszy i najbardziej charakterystyczny kwadrat magiczny ułożony z kamieni domina, różniący się przy tym zasadniczo od wszystkich poprzednich, gdyż sumuje się w nim nie oczka całych kamieni, lecz oczka kwadracików, które (jeśli nie brać w rachubę mydeł stanowiących całą ostatnią kolumnę) składają się na kwadrat czterdziestodziewięciopolowy.



Ułożenie tego kwadratu, który ukazał się w tygodniku francuskim *l'Illustration* w roku 1897, przynosi prawdziwy zaszczyt bezimiennemu jego autorowi. Kto się pokusi o inne rozwiązanie tego zadania?

5. Odgadnienia

A. *Czy można odgadnąć, jakimi kwadracikami zakończy się szereg rozpoczęty danym kamieniem?* Owszem, można to odgadnąć i zapowiedzieć za pomocą pewnej drobnej... malwersacji:

Wszystkie kamienie domina przewraca się do góry stroną ślepą, miesza się je długo i przezornie, ukrywając równocześnie w ręce jeden z kamieni — którykolwiek, byle nie podwójny.

Przypuśćmy, że będzie to kamień 3 — 5.

Następnie proponuje się komuś spośród zebranych, by odkrył jakiś kamień na chybił-trafił i począł z obu jego końców układać szereg według zwykłych prawideł domina.

W tym czasie można dla wywołania większego efektu przeprowadzać pozornie wielce zawiłe dociekania liczbowe, by po chwili, jakby na skutek ukończenia owych kombinacyj, oświadczyć, że szereg rozpoczęty kamieniem, jaki właśnie wylosowano, będzie miał po ułożeniu wszystkich kamieni na jednym końcu 3, na drugim 5; choć właściwie wiadome to było odgadującemu od samego początku, a ściśle mówiąc: od chwili, gdy ukrył kamień 3 — 5.

Odgadnienie powyższe opiera się na tej właściwości domina (o 28 kamieniach), że stosując zwykłe prawidła gry można ze wszystkich kamieni ułożyć zamknięty krąg. Gdy więc z któregokolwiek miejsca usunie się jeden z kamieni, na przykład 3 — 5, wtedy oczywiście utworzy się w tym miejscu przerwa, na końcach której będą kwadraciki o takich samych ilościach oczek, jakie były na kamieniu usuniętym.

B. *Jak odgadnąć, ile kamieni przesunięto.* Jest to właściwie parafraza podobnego odgadnienia dokonywanego na szeregu kart.

Układa się według pokazanego obok wzoru szereg złożony z 25 kamieni.

W szeregu tym, jak łatwo zauważyć, pośrodku leży kamień 0 — 0. Na górnym końcu szeregu leżą kamienie ułożone w odwróconym ciągu naturalnym liczb od 12 do 1, na dolnym zaś końcu leży 12 kamieni zupełnie dowolnie zestawionych. Cały ten szereg kamieni obracamy ślepą stroną na wierzch i polecamy, by któraś z osób zebranych zechciała pod nieobecność odgadującego przesunąć z dolnego końca szeregu na górny kilka kamieni. Odgadujący po powrocie odkrywa kamień środkowy i odczytuje na nim, ile kamieni przesunięto.

Można zastrzec, by liczba przesuwanych kamieni nie przekraczała pięciu lub sześciu; wówczas odgadnienie da się łatwo powtórzyć. Za drugim jednak razem należy odkryć nie środkowy kamień, lecz ten, który stać będzie odeń w dół o tyle miejsc dalej, ile kamieni przesunięto za pierwszym razem.

Zasada tego odgadnienia jest tak prosta, że wszelkie wyjaśnienia byłyby zbyteczne.

C. *Podwójny wzrok, czyli odszukanie z zawiązanymi oczyma kamieni o kolejnych liczbach oczek.* Ustawia się z dwunastu kamieni kolumnę podaną na rysunku, na pozór zupełnie przypadkowo ułożoną.

Można przy tym zamiast kamienia 2 — 1 postawić 3 — 0, zamiast 3 — 3 postawić 4 — 2 albo 0 — 6 i tak dalej, chodzi bowiem jedynie o to, by w pewnym określonym miejscu od góry kolumny leżał kamień z odpowiednią ilością oczek.

Kolumnę tę obraca się licem kamieni do stołu i z zawiązanymi dla większego efektu oczami poczyna się przekładać kamienie z góry na spód kolumny, wskazując bezbłędnie kolejno kamienie z liczbą oczek 1, 2, 3, 4, 5,..., przy czym odkrywane kamienie odsuwa się na bok.

Jest to sztuczka bardzo efektowna, a zarazem niesłychanie prosta: kamienie w danej kolumnie są tak ustawione, że po przełożeniu tylu kamieni, ile liter zawiera nazwa danej liczby: r a z, d w a, t r z y i tak dalej — następuje kamień z odpowiednią liczbą oczek: 1, 2, 3, ...

Dla odkrycia kamienia z jednym oczkiem należy z góry na dół przenieść trzy kamienie (r—a—z), po czym owego odkrytego asa odsuwa się na bok. Dalej przekłada się na dół trzy kamienie (d—w—a), odkrywa się dwójkę i znowu odsuwa się ją na bok. Teraz z kolei przekłada się cztery kamienie (t—r—z—y); następny kamień będzie poszukiwaną trójką i tak dalej.



Aby odgadujący mógł zmieniać porządek kamieni przy ustawianiu owej czarodziejskiej kolumny, przez co wzbudza się tym większy podziw obecnych, podajemy w poniższych tablicach liczebniki w różnych językach, a obok tych liczebników dajemy odpowiedni układ kamieni domina — z góry na dół.

W języku polskim		W języku rosyjskim		W języku niemieckim	
Raz	3	Один	3	Eins	6
dwa	6	два	6	zwei	7
trzy	7	три	8	drei	3
cztery	1	четыре	5	vier	5
pięć	5	пять	1	fünf	1
sześć	8	шесть	11	sechs	9
siedem	9	семь	12	sieben	11
osiem	2	восемь	9	acht	10
dziewięć	11	девять	2	neun	4
dziesięć	4	десять	4	zehn	2
jedenaście	12	одиннадцать	7	elf	12
dwanaście	10	двенадцать	10	zwölf	8

W języku łacińskim		W języku francuskim		W języku angielskim	
Unus	12	Un	10	One	10
duo	3	deux	3	two	3
tres	11	trois	1	three	5
quatuor	8	quatre	11	four	1
quinque	1	cinq	12	five	11
sex	6	six	5	six	12
septem	7	sept	8	seven	7
octo	10	huit	2	eight	2
novem	2	neuf	7	nine	4
decem	9	dix	9	ten	6
undecim	5	onze	4	eleven	8
duodecim	4	douze	6	twelve	9

Kto zna jeden z tych języków albo zechce wyuczyć się nazw pierwszych 12 liczb w nie znanym mu języku, może być pewien, że najbystrzejszy nawet świadek jego produkcji nie będzie mógł odnaleźć do nich klucza i chyba tylko genialnej pamięci odgadującego będzie tę sztukę przypisywał.

Zauważmy przy tym, że w łacińskim tekście wzięto formę quatuor (a nie quattuor).



VII

GRY, ZABAWY, ŁAMIGŁÓWKI, SZTUKI I FIGLE MATEMATYCZNE

1. Labirynty, czyli błędniki

I znowu jedno dziwo matematyczne, którego powstanie gubi się w legendarnej pomroce dziejów.

Karol Lepsius, znakomity egiptolog, utrzymuje, że nazwa *labirynt* pochodzi od egipskich słów: *lepi* — „święty zakład" i *re-hint* — „ujście kanału". Inni natomiast uczeni twierdzą, że jest to słowo greckiego pochodzenia oznaczające chodniki podziemne. Czy jednak słowo to, pojęcie i rzecz sama powstały na ziemi greckiej, czy przeszły tam przed wielu, wielu wiekami z Egiptu — tego dociec nie sposób.

Wiadomo z prac Lepsiusa, że w Egipcie nad jeziorem Moeris dotychczas istnieją zwaliska labiryntu wzniesionego na 2100 lat przed n. e., z historycznych więc labiryntów najstarszego. O innych dwóch błędnikach starożytności wspomina Pliniusz, mianowicie o labiryncie lemnickim na wyspie Lemnos i italskim pod Clusium. Najpopularniejszy jednak jest legendarny labirynt kreteński, w którym przebywać miał długie lata bajeczny potwór Minotaur, aż wreszcie bohaterski Tezeusz dotarł do wnętrza labiryntu, potwora uśmiercił i zdrowo a pomyślnie na świat powrócił dzięki przysłowiowej od tego czasu „nitce Ariadny".

Rysunkami labiryntów ozdabiano we wczesnych wiekach średnich szaty chrześcijańskich cesarzy, a potem, zwłaszcza w XII stuleciu — ściany oraz posadzki świątyń. Był to symbol zawiłości dróg ziemskich i ludzkich błądzeń.

W późniejszych wiekach labirynty utraciły pierwotny charakter mistyczno-religijny i stały się urozmaiceniem wielkich książęcych parków, pałaców itp.

Wszystkie znane labirynty podzielić można na labirynty pozorne i labirynty prawdziwe. W wielu przypadkach bowiem rysunek niezmiernie zawiły jest tylko wielokrotnym załamaniem drogi zupełnie prostej.

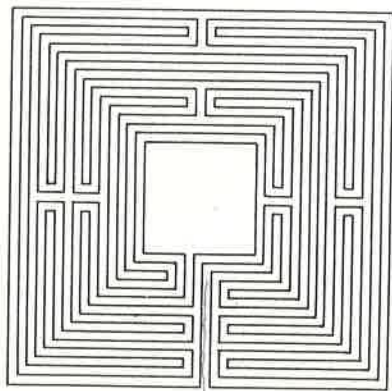
Jeżeli prawdziwy labirynt określimy jako gmatwaninę dróg, przez które niezmiernie trudno dojść do środka, jako też wyjść z powrotem, to w labiryntach pozornych dzieje się wręcz przeciwnie: raz wszedłszy w nie i idąc przed siebie nie można nie dojść do środka, a zawróciwszy — nie można nie wyjść z ich korytarzy.



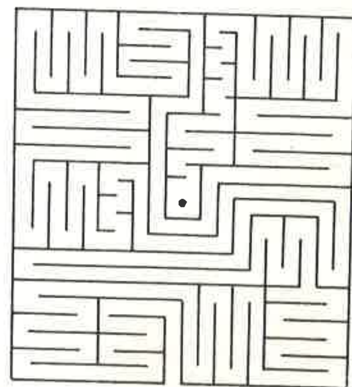


Rys. I

Takim labiryntem pozornym jest podany tu na rysunku I słynny labirynt w katedrze Chartres (w odległości kilkudziesięciu kilometrów od Paryża), liczący w średnicy 40 łokci.



Rys. II



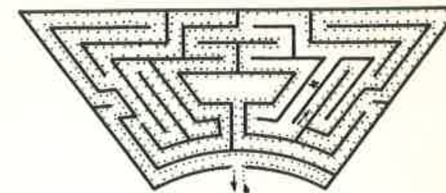
Rys. III

Takim samym pozornym tylko błędnikiem jest podany obok na rysunku II labirynt włoski z XVI stulecia, jak również labirynt duńskiego pochodzenia z tegoż wieku, wyobrażony na rysunku III.

Miejsce jakby pośrednie pomiędzy tymi pseudolabiryntami i labiryntami prawdziwymi zajmują błędniki, w których można się poruszać z całą pewnością siebie, gdy się zna ich tajemnicę, gdy się posiadło jedną jedyną drobną wskazówkę — jakby klucz do tej pozornie nader zawiłej zagadki.



Rys. IV



Rys. V

Tego typu jest słynny labirynt ogrodowy w Campton Court nie opodal Londynu, utworzony ze szpalerów, pierwotnie grabowych, wiodących do dwóch wielkich drzew, pod którymi niegdyś stały ławki (rys. IV).

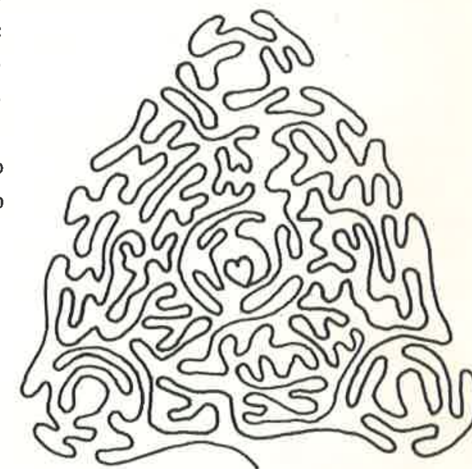
Labirynt ten pochodził, jak twierdzą niektórzy historycy, jeszcze z czasów Henryka VIII. Zajmował on ponad 1200 metrów kwadratowych, aleje zaś jego liczyły ogółem pół mili angielskiej, czyli 800 metrów długości.

Jest to już — jak widzimy z rysunku — labirynt, w którym istotnie można zabłądzić. Ale gdy się zna jego tajemnicę, gdy się wie, że posuwając się naprzód należy stale dotykać albo prawą, albo lewą ręką szpaleru, obejdzie się go dokoła bez żadnej trudności, omijając przy tym, jak to widać na rysunku V, tylko jedną jedyną alejkę.

Labirynty podane poniżej są to już błędniki w pełnym znaczeniu tego słowa.



Rys. VI



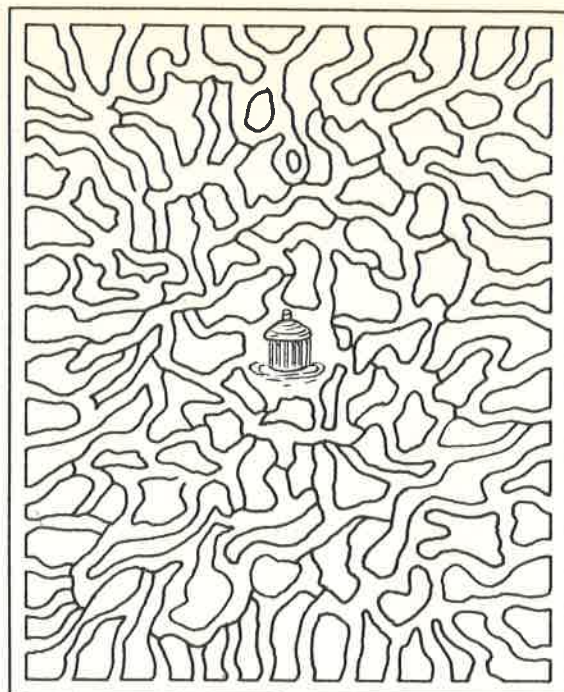
Rys. VII

Rysunek VI przedstawia efektowny, ale niezbyt zawiły labirynt niemiecki.

Bardzo ciekawy typ labiryntu podany jest na rysunku VII.

Usypany był z ziemi w kształcie grządek około 1 stopy wysokich, wijących się i splatających na obszarze blisko 4000 m². Istniał w Anglii, w hrabstwie Dorset do roku 1730.

Kto odnajdzie dostęp do umieszczonego pośrodku rysunku serduszka?



Rys. VIII

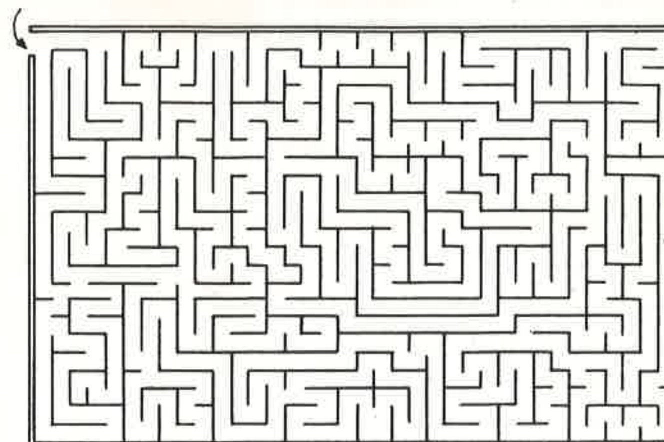
W samym środku wspaniałego parku (rys. VIII) ginie wśród labiryntu alei i żywopłotów maleńki pałacyk. Jest to ustronie, w którym rozmiłowany w cudnej Rosamundzie król angielski Henryk II ukrył zazdrośnie jej urodę przed oczami ludzkimi.

Gdybyście żyli w XII wieku i chcieli ujrzeć opiewaną przez tylu poetów piękność Rosamundy, musielibyście odnaleźć ścieżkę, która wiedzie do jej dworku.



Najskuteczniejszym sposobem ułatwienia sobie tego zadania (jak i dwu poprzednich) byłoby... rozpoczęcie od końca: usiłowanie wydobycia się z matni owych dróg — ze środka rysunku ku peryferii.

Tego doskonałego sposobu nie można zastosować w ostatnim przytoczonym tu labiryncie, który urządził w swym ogrodzie tak często przez nas wspominany matematyk angielski Rouse Ball (rys. IX).



Rys. IX

Nie tyle chodzi tu bowiem o dojście do jakiegoś określonego celu, ile raczej o odbycie jak najdłuższego spaceru z najmniejszą ilością alei dwukrotnie nawiedzonych.

Aczkolwiek w pojęciu potocznym labirynt jest to gmatwanina dróg, z której nie ma wyjścia, to jednak, wbrew temu mniemaniu, po krótkiej chwili zastanowienia każdy przyznać musi, że nie może być labiryntu bez wyjścia, skoro jest... wejście.

Możność więc rozwiązania każdego błędnika, nawet bez nitki Ariadny, nikogo już obecnie nie zadziwi. Natomiast niejednemu dziwne wydać się może, iż znane są nie tylko przepisy na podobne rozwiązania, ale że istnieje cała niemal teoria geometryczna tych rozwiązań.

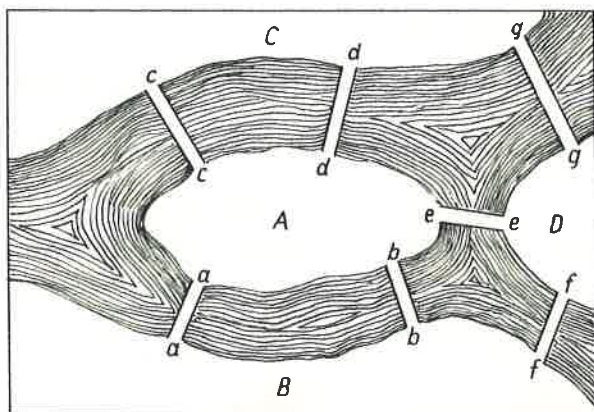




2. Mosty królewieckie

W dość ścisłej łączności z zagadnieniem labiryntów znajduje się cały szereg bardzo urozmaiconych zadań, zabaw i gier, które tu kolejno przeglądniemy nie zapuszczając się zbytnio w ich teorie matematyczne, wskazując natomiast najprostsze, a jednak bardzo nieraz pomysłowe ich rozwiązania lub zastosowania praktyczne, zmierzające ku podaniu Czytelnikowi ciekawej a pożytecznej rozrywki.

Słynne zadanie o mostach w Królewcu[1]) ułożył Euler w roku 1759. Postawił mianowicie pytanie, czy można po siedmiu mostach łączących dzielnice miasta z wyspą na Pregole odbyć spacer w ten sposób, by przejść kolejno przez wszystkie mosty nie przechodząc po żadnym z nich więcej niż raz jeden.



Próby, które radzimy przeprowadzić, wykażą, że jest to niemożliwe.

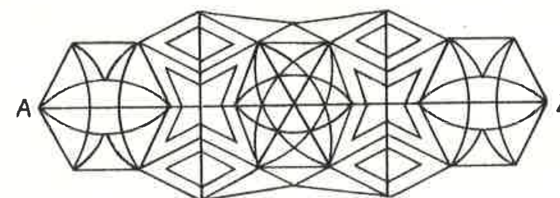
A popróbujcie też rozpatrzyć możliwość podobnych spacerów po mostach Poznania, Krakowa, Szczecina, Wrocławia... Może sami wówczas odkryjecie, jakie są ogólne zasady możliwości lub niemożliwości wykonania takich przechadzek.

[1]) Obecnie Kaliningrad.

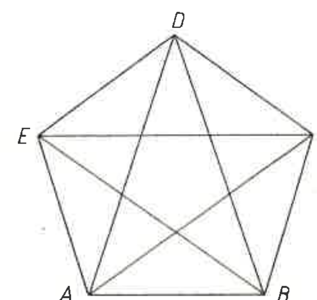
3. Figury unikursalne, czyli jednobieżne

Figury, które można nakreślić jednym pociągnięciem ołówka czy pióra, nie prowadząc go nigdy po linii już nakreślonej, nazywają się jednobieżnymi.

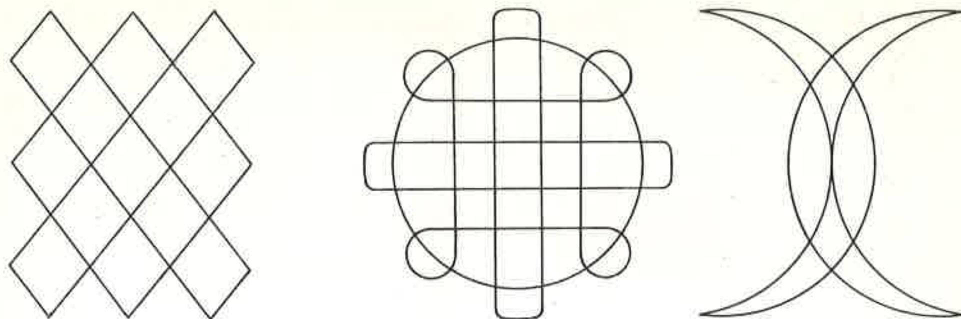
Niejeden zapewne z Czytelników bardzo się zadziwi, gdy się dowie, że nie zdoła nakreślić w ten sposób zwykłego prostokąta czy kwadratu z dwiema przekątnymi, natomiast z łatwością może narysować jednym ciągiem figurę tak skomplikowaną, jak ta, którą tu podajemy na rysunku:

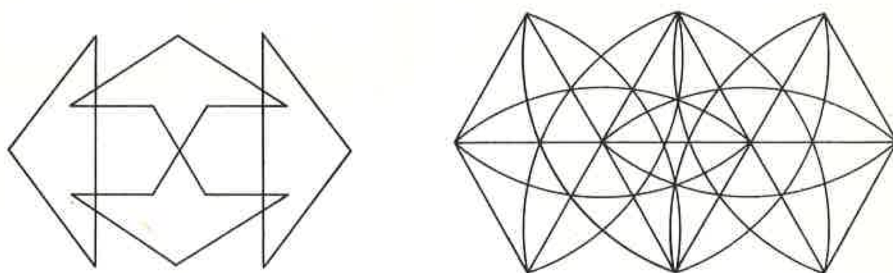


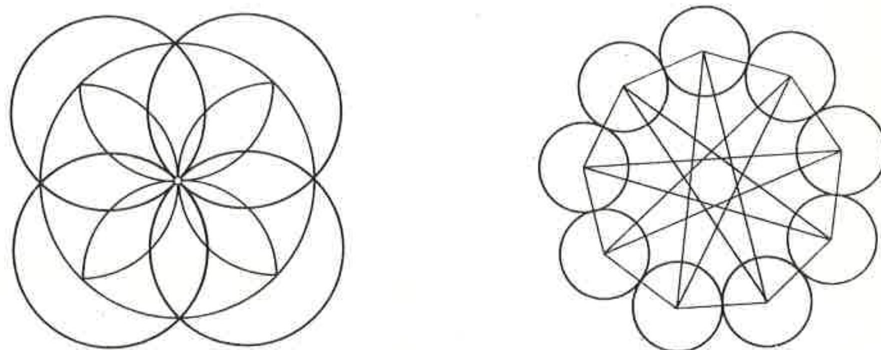
Na czym to polega? Jak odróżnić taką figurę unikursalną wśród podobnych jej figur „niejednobieżnych"? Czy w ogóle można postawić w tym względzie jakieś prawidła zasadnicze? Oczywiście można, lecz wymaga to bardzo skomplikowanych rozważań matematycznych. My zaś poprzestaniemy tu na rozpatrzeniu tylko prostych przykładów i przytoczeniu następnie już gotowych, zupełnie ścisłych przepisów.

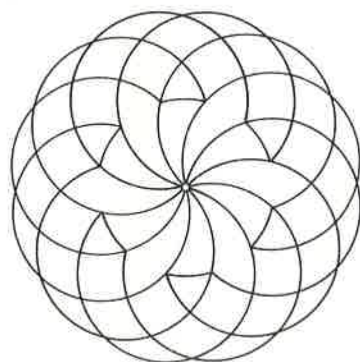


Pięciokąt *ABCDE* nakreślić można jednociągowo łatwo i różnymi sposobami, np. *ABECBDCADEA*. Czym różni się zasadniczo ten jednobieżny pięciokąt z 5 przekątnymi od niemożliwego do nakreślenia jednociągowo kwadratu z 2 przekątnymi? „Nieparzystą liczbą boków" — odpowiecie. Tak, lecz to nie jest w danym przypadku różnica zasadnicza, gdyż — jak łatwo się przekonać — kwadrat z 1 przekątną da się doskonale nakreślić jednym ciągiem, natomiast z pięciokątem, gdy zaczniemy wymazywać kolejno jego przekątne, dziać się poczną bardzo dziwne rzeczy. Jeśli pozostawimy mu 4 przekątne, nie utraci jeszcze swej jednobieżności, podobnie przy trzech przekątnych; natomiast przy dwóch przekątnych już nie będzie figurą unikursalną, co nie przeszkadza, że gdy wymażemy jeszcze jedną przekątną, jednobieżność znów odzyska.









Te przemiany niewątpliwie naprowadzą już uważnego Czytelnika na właściwe przypuszczenie, że unikursalność figur zależy od węzłów, w których spotykają się linie, ściślej mówiąc — od tego, czy węzły te są parzyste, czy nieparzyste, jeśli tymi słowami oznaczymy węzły, w których schodzi się parzysta, względnie nieparzysta ilość linij.

I oto skrócone do minimum przepisy ogólne:

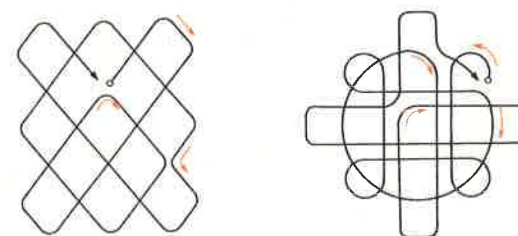
Figura jest jednobieżna, gdy wszystkie jej węzły są parzyste albo figura liczy nie więcej niż dwa węzły nieparzyste.

Z powyższych zasad niełatwo wyciągnąć jakieś wnioski praktyczne, jak należy kreślić owe figury jednobieżne. Jedna atoli wskazówka musi być podana, mianowicie ta, że jeśli w danej figurze istnieją węzły nieparzyste, to trzeba ją rozpocząć rysować od jednego z tych właśnie węzłów.

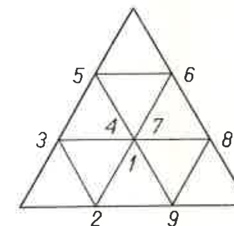
Kreślenia jednociągowe należą do bardzo ciekawych i pouczających rozrywek; są ludzie, którzy się takimi rysunkami pasjonują. Podajemy na poprzedniej stronicy szereg interesujących figur i przytaczamy dla paru z nich rozwiązania, resztę pozostawiając cierpliwości i pomysłowości Czytelnika.

Trzeci rysunek u góry przedstawia słynny podpis Mahometa, jaki wycinał czterema pociągnięciami puginału lub szabli.

A oto rozwiązanie dwóch górnych figur:



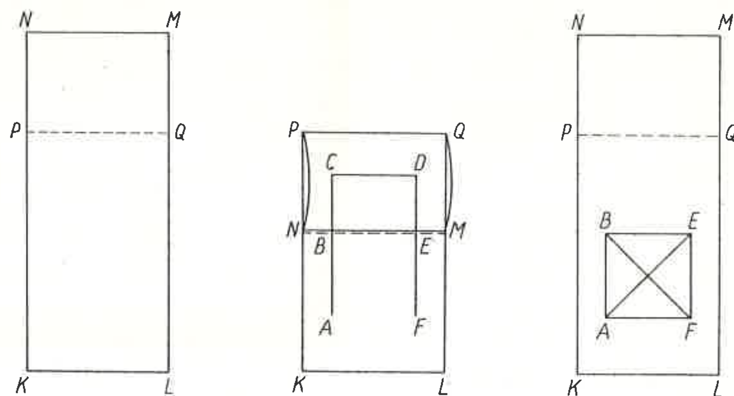
Prócz podawania pewnych figur, już nakreślonych, z poleceniem ich jednociągowego obrysowania można dać i takiego rodzaju zadania, nieco odmienne w formie, choć identyczne w treści:



Podzielić trójkąt równoboczny na dziewięć równych części linią ciągłą nie kreśląc ponownie żadnej linii już narysowanej ani żadnej nie przecinając.

Pomysłowe rozwiązanie tu podane nie wymaga dalszych wyjaśnień.

Gdy zaś ktoś zaproponuje, by nakreślić jednociągowo kwadrat z dwiema przekątnymi, co — jak zaznaczyliśmy — jest niewykonalne, można mu odpowiedzieć takim figlem:



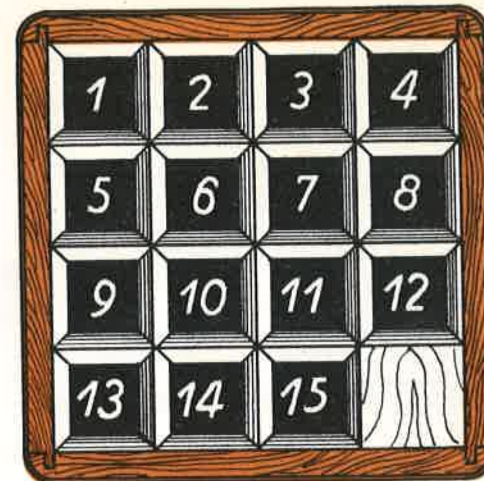
Niechaj prostokąt *KLMN* oznacza arkusz papieru, na którym ma być narysowany ów kwadrat. Zginamy arkusz po linii *PQ*. Rysujemy teraz częściowo na prawej stronie papieru, a częściowo na lewej stronie linię *AC*, dalej na lewej stronie linię *CD* i znów częściowo na lewej, częściowo na prawej stronie linię *DF*. Po czym arkusz wyprostowujemy i do pozostałych na prawej stronie papieru linij *AB* i *EF* z łatwością dorysowujemy jednociągowo linie *AE*, *EB*, *BF* i *FA*.

W ścisłej łączności z zagadnieniem figur jednobieżnych jest słynne zadanie Hamiltona, znane pod nazwą *Podróż po dodekaedrze* (czyli po dwunastościanie), które znajdzie się w drugim tomie tych rozrywek.

4. Piętnastka

Gra ta, znana pod angielską nazwą *Fifteen Puzzle* i francuską nazwą *Taquin*, pochodzi z Ameryki, gdzie wynalazł ją pewien głuchoniemy w roku 1878. Z niesłychaną wprost szybkością, z gwałtownością epidemii rozpowszechniła się po Stanach Zjednoczonych, przeszła do innych krajów amerykańskich i ogarnęła Europę. Spotykano ludzi jadących tramwajami, dorożkami, czekających swej kolei przy kasach itp., pogrążonych w rozwiązywaniu *Piętnastki*. Dość powiedzieć, że władze rządowe w Ameryce zmuszone były wydawać specjalne nakazy, aby urzędnicy w godzinach biurowych nie mieli przy sobie *Fifteen Puzzle*, gdyż nie mogli się opanować, by ukradkiem nie oddawać się ulubionej rozrywce.

Jest to gra niezmiernie prosta. Składa się z ramki drewnianej albo kwadratowego bardzo płytkiego pudełka, w którym mieści się piętnaście ruchomych kwadracików — po cztery w każdej kolumnie z wyjątkiem ostatniego szeregu, w którym miejsce odpowiadające szesnastemu kwadracikowi jest wolne.



Na kwadracikach widnieją numery od 1 do 15.

Należy kwadraciki te wyrzucić, ułożyć, jak się trafi, a następnie korzystając z owego jedynego wolnego miejsca przesuwać je dopóty, dopóki nie osiągną pozycyj takich, jak wskazane jest na rysunku. Oczywiście można kwadracików nie mieszać, lecz postawić sobie za zadanie osiągnięcie pewnego odmiennego układu liczb, na przykład przejście od ułożenia pierwotnego do jednej z poniższych pozycyj lub im podobnych.

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	

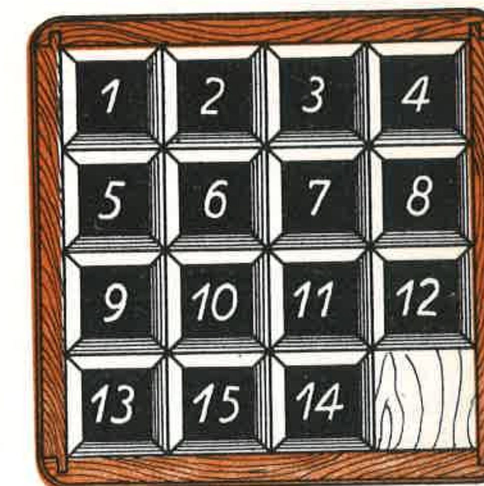
1	3	6	10
2	5	9	13
4	8	12	15
7	11	14	

15	14	12	9
13	11	8	5
10	7	4	2
6	3	1	

Wkrótce po owym wielkim rozpowszechnieniu się Piętnastki pojawiły się jej teorie. Zwłaszcza dwaj matematycy Johnson i Story podali bardzo dużo ciekawego materiału naukowego w tej sprawie.

Teoryj tych nie przytaczamy raz dlatego, że są dość skomplikowane, a po wtóre dlatego, że ich spopularyzowanie oraz podanie sposobu przewidywania rozwiązalności lub nierozwiązalności danego układu wpłynęłoby niewątpliwie ujemnie na zainteresowanie się samą grą, oziębiło pierwotny do niej zapał.

Powiemy tylko, że nie zawsze możliwe jest osiągnięcie układu podanego na pierwszym rysunku. Niejednokrotnie w szeregu najniższym zamiast kolejności 13, 14, 15 otrzymuje się ugrupowanie: 13, 15, 14.

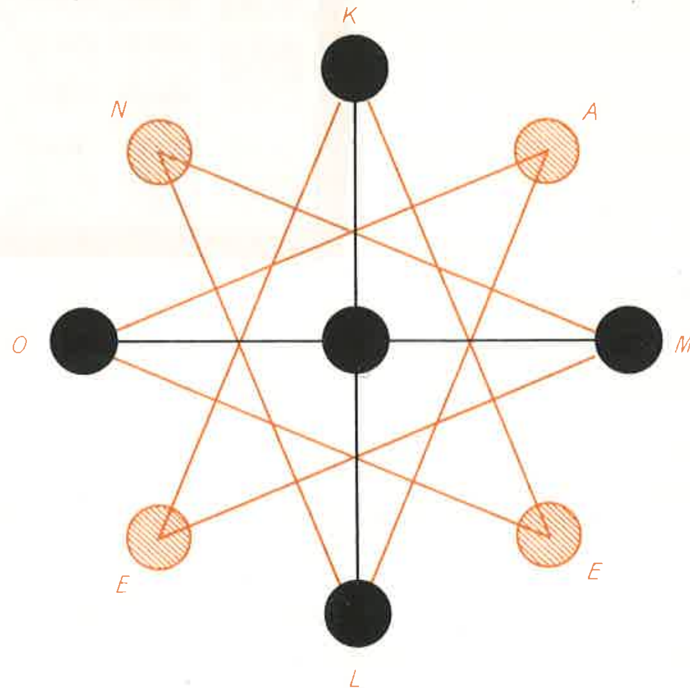


Nie radzimy wówczas mozolić się dalej nad przestawianiem tych ostatnich dwu kamieni, gdyż jest to niewykonalne.

Pożyteczne byłoby posiadanie szesnastego kwadraciku z napisem 16, można bowiem przy szesnastu kamieniach używać tej zabawki do układania różnymi sposobami szesnastopolowych kwadratów magicznych.

5. Kameleon

Gra ta z pozoru nie przypomina zupełnie Piętnastki, oparta jest jednak na tak dalece zbliżonej zasadzie, że I. Uspienski w swym zbiorze pt. *Izbrannyje matiematiczeskije razwleczenija* sprowadza teorię Kameleona właściwie do teorii Piętnastki.



Przybory do Kameleona są jeszcze prostsze niż do gry poprzedniej. Trzeba na tekturze lub deseczce zbudować zupełnie prawidłową gwiazdę ośmioramienną. Na czterech jej promieniach i w środku należy nalepić czerwone krążki i powiązać je czerwonymi liniami; na czterech pozostałych promieniach można umieścić cztery krążki i liniami połączyć je z krążkami czerwonymi. Ponad krążkami stoją litery, które w kierunku obiegu wskazówki zegara składają począwszy od promienia górnego słowo *KAMELEON*. Oprócz takiej tablicy należy mieć osiem luźnych, ruchomych krążków, na których wypisane są te same litery: *K, A, M, E, L, E, O, N*.

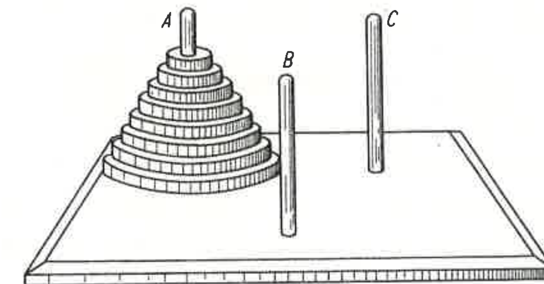
Krążki ruchome ustawia się w zupełnie przypadkowej kolejności na ośmiu krążkach tablicy; krążek centralny zostaje nie zajęty. Gra polega na takim kolejnym przesuwaniu krążków ruchomych, aby wypisane na nich litery znalazły się obok takich samych liter tablicy, a więc utworzyły wyraz *KAMELEON*.

I tej gry teoria jest ciekawa, lecz nazbyt skomplikowana, a więc nie będziemy jej podawać.



6. Wieża w Hanoi

Gra ta nosi nazwę tak egzotyczną prawdopodobnie dlatego, iż jej pomysł nasunął się sławnemu matematykowi francuskiemu Lucasowi pod wpływem legendy hinduskiej, którą na zakończenie opisu przytoczymy.



Trzeba mieć osiem krążków wyciętych z drewna lub twardego kartonu o zmniejszającej się stopniowo średnicy oraz trzy żelazne lub drewniane pręty przytwierdzone pionowo do deski. Krążki powinny mieć pośrodku otwory, przez które można je nanizać na jeden z prętów tak, jak to wskazuje rysunek, formując tym sposobem jakby rodzaj wieży.

Zadanie polega na tym, by całą ową „wieżę" przenieść z pręta *A* na pręt *B* posługując się trzecim, pomocniczym prętem *C*.

Należy przy tym przestrzegać następujących warunków: 1° jednorazowo przenieść można tylko jeden krążek; 2° nakładać zdjęty krążek można bądź na pręt, który jest zupełnie wolny, bądź na krążek o większej średnicy. Nakładanie bowiem na którymkolwiek pręcie większego krążka na mniejszy jest niedozwolone.

Niejednemu zapewne z Czytelników zadanie, takimi „obstawione" warunkami, wyda się na pierwszy rzut oka niewykonalne. A jednak jest to tylko kwestia cierpliwości.

Aby unaocznić proces prawidłowego przekładania krążków, oznaczmy krążki cyframi 1, 2, 3, ..., 7, 8, zaczynając od najmniejszego, i sam proces przekładania przedstawmy na załączonej tabliczce:

	Pręt A	Pręt C	Pręt B
Przed rozpoczęciem	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	. . —	. . —
Po 1 przeniesieniu	. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	. . 1	. . —
„ 2 „	. . 3, 4, 5, 6, 7, 8	. . 1	. . 2
„ 3 „	. . 3, 4, 5, 6, 7, 8	. . —	. 1, 2
„ 4 „	. . . 4, 5, 6, 7, 8	. . 3	. 1, 2
„ 5 „	. . 1, 4, 5, 6, 7, 8	. . 3	. . 2
„ 6 „	. . 1, 4, 5, 6, 7, 8	. 2, 3	. . —
„ 7 „	. . . 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3	. . —
„ 8 „	. . . . 5, 6, 7, 8	1, 2, 3	. . 4
. . . . . .	. . . .	. . . .	. . .

Ile takich przełożeń trzeba wykonać, aby przenieść całą wieżę?

Jeśli przez x oznaczymy poszukiwaną liczbę przełożeń krążków, a przez n — liczbę samych krążków, to $x = 2^n - 1$, a więc przy ośmiu krążkach mamy $x = 2^8 - 1 = 255$. Inaczej mówiąc trzeba dokonać w zadaniu powyższym 255 przełożeń. Zbyt wielka to próba cierpliwości!

Wobec tego radzimy zamiast 8 krążków wziąć 4, 5 albo 6. Przy czterech krążkach już po 15 przełożeniach powinna się cała wieża znaleźć na pręcie.



Legendę, o której wspominaliśmy podał uczony francuski Parville w tygodniku przyrodniczym *La Nature*.

W Indiach, w mieście Benares, pod kopułą głównej świątyni, w miejscu, gdzie znajduje się środek Ziemi, postawił Brahma na brązowej tabliczce trzy diamentowe pałeczki o wysokości jednego łokcia i o grubości tułowia pszczoły. Przy stworzeniu świata na jedną z tych pałeczek nanizane zostały 64 krążki z czystego złota z otworami pośrodku, tak iż utworzyły postać ściętego stożka. Kapłani, zmieniając się wzajemnie dniem i nocą bez przestanku, zajęci są przeniesieniem tego stożka z pierwszej pałeczki na trzecią, posiłkując się przejściowo pałeczką drugą, przy czym zobowiązani są najsurowiej przestrzegać dwu następujących zakazów: po pierwsze, za jednym ujęciem nie przenosić nigdy więcej ponad jeden krążek; po wtóre, nigdy nie kłaść krążka większego na mniejszym. Gdy kapłani, zachowując ściśle te przepisy, ukończą swą pracę, nastąpi koniec świata...

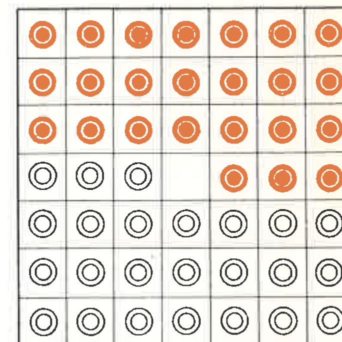
Kto by pragnął dowiedzieć się, jak prędko spodziewać się należy tej najciekawszej ze wszystkich przygód naszego świata, niechaj przyjmie do wiadomości krótkie poniższe obliczenie:

Przeniesień dokonać muszą kapłani tyle, ile miało być owych ziarn na szachownicy, to znaczy 18 446 744 073 709 551 615. Gdybyśmy przyjęli, że kapłani co sekundę przenoszą jeden krążek, to praca ich trwałaby nie mniej niż pięć miliardów stuleci. Długo trzeba czekać...

7. Kadryl Lucasa

Oto jeszcze jedna gra oparta na przestawianiu. Na kwadracie 49-polowym rozstawione są krążki barwne i białe tak, jak wskazuje rysunek.

Pole środkowe jest wolne. Korzystając z tego pola należy przeprowadzić białe krążki na miejsce barwnych, a barwne na miejsce białych. Przy tym można albo przesuwać krążek na pole wolne, albo też przeskakiwać jednym krążkiem przez drugi sąsiedni, gdy poza nim znajdzie się pole puste.



O ile wieża hanojska wydaje się zazwyczaj z pozoru grą bardzo trudną i zawiłą, o tyle przestawianka na pierwszy rzut oka robi wrażenie zabawki bardzo prostej. W rzeczywistości nie jest to sprawa tak łatwa i dlatego przytoczymy tu parę wskazówek praktycznych.

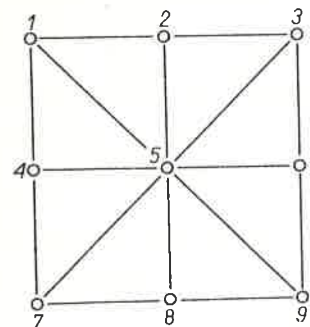
Rozpocząć należy od średniego poziomego szeregu i dokonać w nim całkowitego przestawienia. Następnie przejść do średniej pionowej kolumny i korzystając z każdorazowego przesunięcia się pustego pola ku górze lub ku dołowi przestawić krążki w tym szeregu, w którym czasowo znajdzie się puste pole kolumny środkowej.

Dla wykonania całkowitego przestawienia krążków wykonać wypadnie 120 poruszeń. Można jednak dokonać tego w jednym poruszeniu: obróciwszy mianowicie tablicę wraz ze wszystkimi krążkami o 180°.

8. Młynek

Przechodzimy teraz do gier we dwie osoby.

Jedną z najłatwiejszych do wykonania dwuosobowych gier jest Młynek. Nie wymaga on żadnych zgoła przyrządów: wystarczy kawałek papieru, na którym kreśli się figurę podaną poniżej, oraz sześć krążków z tektury w dwu kolorach, po trzy krążki dla każdego gracza.



Gracze z początku ustawiają kolejno po jednym krążku na obranych przez siebie punktach tablicy; ustawiwszy zaś wszystkie krążki przesuwają je po kolei po nakreślonych liniach na nowe pozycje. Wygrywa ten, kto pierwszy ustawi swoje trzy krążki w jednej linii, co nazywa się *młynkiem*.

Niestety, Młynek należy do gier o nierównych szansach: rozpoczynający partię, uważnie grając, zawsze wygrywa, jeżeli umieści swój pierwszy krążek w punkcie 5, co daje mu przewagę.

9. Wilk i owce

I to jest gra o nierównych szansach: grając uważnie gracz mający owce zawsze wygrywa.

Gra odbywa się na zwykłej szachownicy o 64 polach: 32 białych i tyleż czarnych. Jeden z graczy ma 4 owce, to jest krążki równej wielkości, ustawione na 4 czarnych lub 4 białych polach wzdłuż jednego brzegu, drugi gracz ma tylko wilka (krążek większy) umieszczonego na takiejże barwy polu po przeciwnej stronie szachownicy. Zarówno wilk jak i owce mogą się przesuwać za każdym posunięciem na ukos o jedno tylko pole tej samej barwy; przy czym jednak owce posuwają się jedynie naprzód, gdy tymczasem wilk ma również prawo do ruchów wstecznych. Wilk wygrywa, gdy przedostanie się poza szereg owiec, owce zaś wygrywają, gdy zdołają osaczyć wilka tak, iż nie może już dokonać żadnego ruchu.



10. Gra Bacheta

Jest to bardzo łatwa rozgrywka, obmyślona przez wielokrotnie wymienionego słynnego matematyka francuskiego z XVII wieku. Można ją uprawiać na sztonach, kamykach, orzechach lub zapałkach albo też po prostu na liczbach.

Omówimy tu ten ostatni sposób, inne zaś czytelnik sam łatwo potrafi zastosować. Gra polega na tym, iż dwie osoby wymieniają liczby wciąż wyższe, idąc od 1 do 100, przy czym należy zawsze wymienić liczbę przewyższającą tę, którą poda przeciwnik, nie więcej jednak niż o 10 jedności. Jeżeli na przykład pierwszy gracz wymieni liczbę 5, drugi może powiedzieć najwyżej 15. Wygrywa ten, kto pierwszy powie 100.

Tajemnica powodzenia w tej grze jest nader prosta: ten oczywiście powie 100, kto pierwszy powie 89, gdyż przeciwnik powiedzieć może zgodnie z zasadami gry co najmniej 90 i co najwyżej 99.

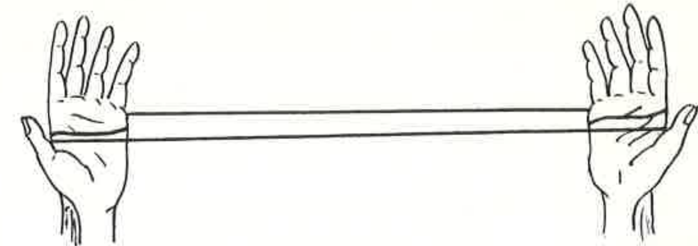
Ten zaś powiedzieć będzie mógł 89, kto poprzednio wymieni 78 — z tej samej racji, co wyżej. Idąc tak dalej, przyjdziemy do przekonania, iż ten wygrywa, kto kolejno wymieniać będzie liczby: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Liczby te, różniące się o 11, łatwe są do zapamiętania, gdyż zawsze mają zespół dwóch cyfr kolejnych.

Póki przeciwnik nie zna tej tajemnicy, lepiej dla niepoznaki dorzucać z początku różne drobne liczby, a dopiero pod koniec przejść na ów zasadniczy szereg.

Przy użyciu do gry sztonów, orzechów lub innych przedmiotów zamiast dodawania stosuje się odejmowanie od 100: wygrywa ten, kto weźmie ostatnie sztony.

11. Zabawa ze sznurkiem

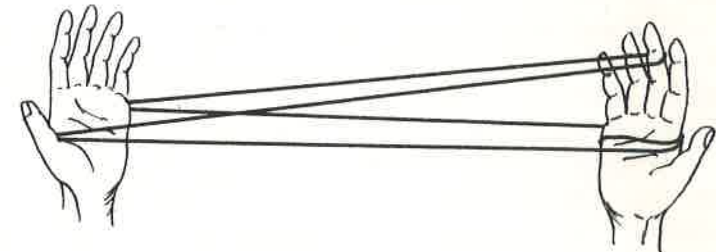
Nie jest to już gra, lecz zabawa we dwie osoby, bardzo niegdyś lubiana i rozpowszechniona, obecnie mało znana.



Rys. I

Bierze się dość długi sznurek, związuje się jego końce i obmotuje nim ręce tak, jak to widzimy na rys. I.

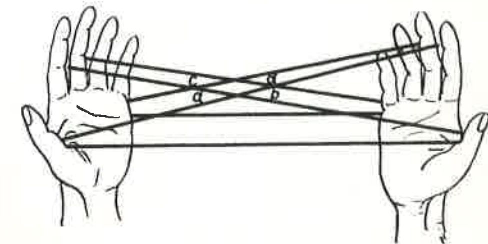
Następnie z obu dłoni środkowym palcem drugiej ręki zdejmuje się sznurek. Przebieg tej czynności wskazany jest na rysunkach II i III, a jej wynik na rysunku IV.



Rys. III



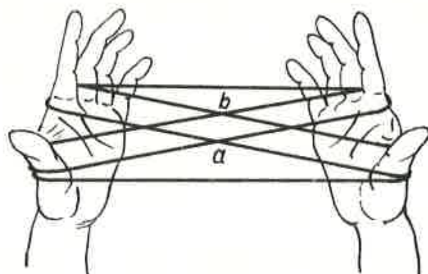
Rys. II



Rys. IV

Jest to pierwsza figura, zwana „daszkiem". Od uformowania tej pierwszej figury podstawowej rozpoczyna się tak zwane „zbieranie" sznurka z jednej pary rąk na drugą.

Towarzysz tej zabawy ujmuje z góry ów „daszek" w kątach *a*, *b* i *c*, *d* palcami wielkim i wskazującym obu rąk i przekłada owe skrzyżowania, mocno w palcach ściśnięte — pod dolnymi wyprężonymi sznurkami. Sznurek przechodzi wówczas na jego palce i tworzy drugą z kolei figurę wskazaną na rysunku V, a zwaną „materacem". (Nazwy te zresztą są zupełnie dowolne, różne w różnych okolicach i dalekie bardzo od jakiegoś widocznego związku z kształtem figur).



Rys. V

Gdy „materac" ujmie znów pierwsza osoba w punktach *a* i *b* w ten sam sposób, jak poprzednio ujęty został „daszek", i przesunie owe skrzyżowania pod zewnętrznymi liniami sznurka, otrzyma wówczas tzw. „wodę" w postaci czterech równoległych linii. Tu „zbieranie" jest już trudniejsze: należy mianowicie, skrzyżowawszy ręce, małymi palcami zahaczyć linie środkowe, odciągnąć tak, żeby się dłonie rozeszły, po czym palce wielkie i wskazujące obu rąk podłożyć pod bliższą dla danej ręki zewnętrzną linię sznurka. Otrzyma się wówczas tzw. „kolebkę", która jest analogiczna do „daszka", tylko w zupełnie odwrotnym układzie. Z „kolebki" przez dalsze zbieranie wytworzą się jeszcze trzy inne figury (w czym ponownie „materac"), aż dojdzie się wreszcie do tak zwanego „wiatraczka" albo „klepsydry", której już „zebrać" nie można.



12. Łamigłówki

Łamigłówek geometrycznych jest liczba niepomierna; przytaczamy więc ich tu tylko kilka — różnego autoramentu, drugą takąż lub większą partię odkładając do drugiego tomu rozrywek.

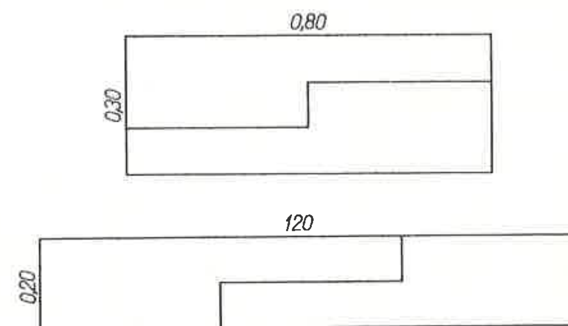
A. Gdy zapytacie, ile jest prostokątów w tej figurze, niejeden przeliczywszy szybko ilość podziałek odpowie bez namysłu, że prostokątów jest 25.

Tyle jest kratek, istotnie! Ale najróżniejszych prostokątów (a o to chodziło w naszym pytaniu) jest w tej figurze nieporównanie więcej, mianowicie 225.

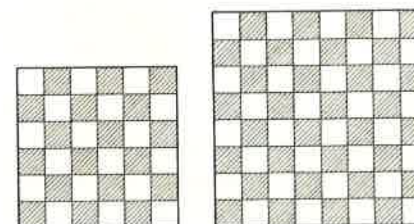
Kto nie wierzy, niech sprawdzi!

B. Stolarz ma jedyną deskę 0,80 m długości, a 0,30 m szerokości; potrzebuje zaś właśnie deski o innych wymiarach, mianowicie 1,20 m długiej, a 0,20 m szerokiej. Jak powinien rozpiłować posiadaną deskę?

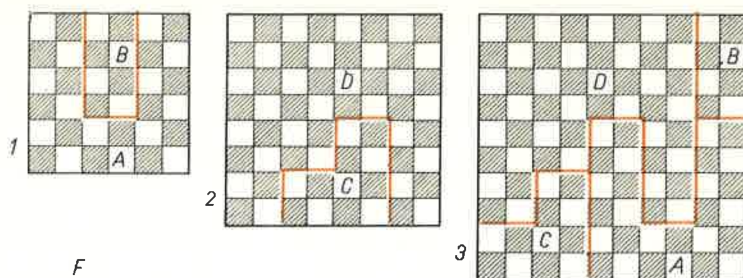
Rysunki pokazują, w jaki sposób sobie poradził ów stolarz. Jak widać, nie od parady miał głowę na karku.

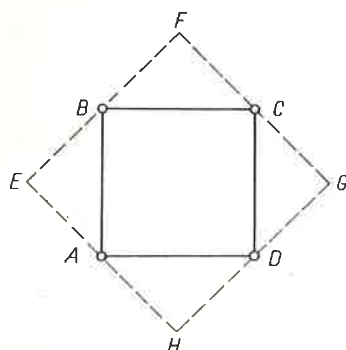


C. Z dwu szachownic, trzydziestosześciopolowej i sześćdziesięcioczteropolowej, zrobić jedną stupolową, przy czym nie należy żadnej z nich dzielić więcej niż na dwie części.



Oto rozwiązanie bardzo zręczne ale czy jedyne?





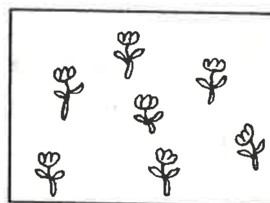
D. W czterech rogach kwadratowego stawu rosną na brzegu drzewa.

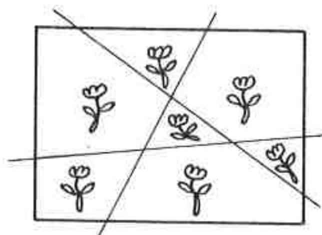
Powierzchnię stawu trzeba było powiększyć w dwójnasób nie zmieniając jego kształtu i nie wycinając drzew.

Dowcipny sposób wykonania tego zadania podaje rysunek.

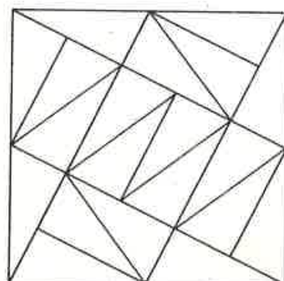
E. Na prostokątnym kawałku płótna wyhaftowano siedem róż. Trzeba je rozciąć na oddzielne sztuki trzema cięciami po liniach prostych.

Oto rozwiązanie:





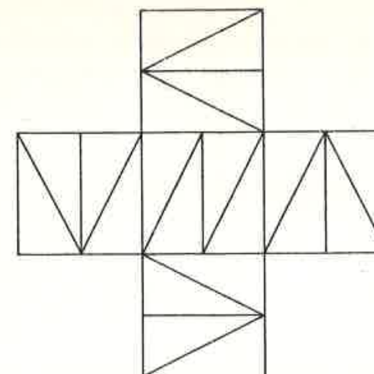
Rozwiązanie opiera się na tej własności trójkąta, że trzy proste tworzące trójkąt rozcinają płaszczyznę na 7 obszarów.



F. Rozciąć kwadrat na dwadzieścia równych trójkątów. Bardzo to pomysłowa i łatwa łamigłówka.

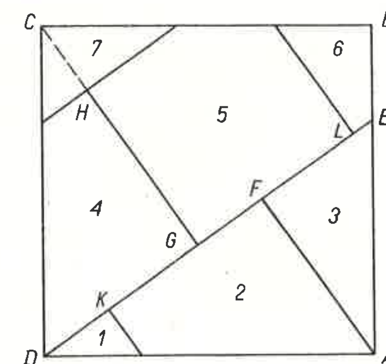
Należy połączyć liniami prostymi środki boków z wierzchołkami kwadratu, jak to wskazuje rysunek. Dalszy podział na trójkąty jest już bardzo ułatwiony.

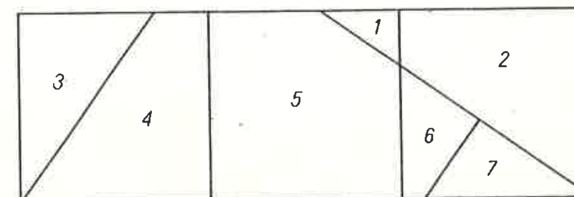
Z owych dwudziestu trójkątów można zbudować krzyż.



Jest to zarazem sposób podziału kwadratu na pięć równych kwadratów — sposób o wiele prostszy niż ten, który zastosować trzeba przy podziale na trzy równe kwadraty.

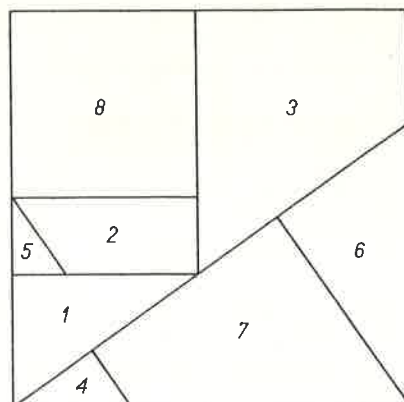
G. Rozciąć kwadrat na trzy równe kwadraty.



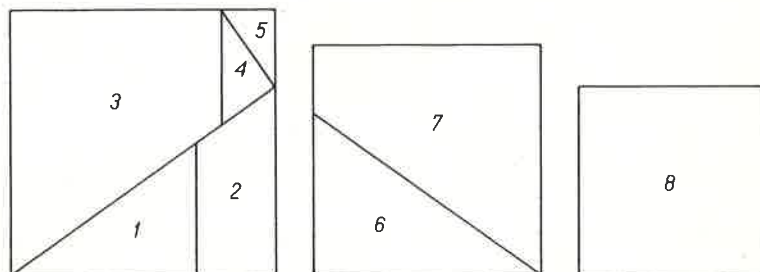


Odcinek *AE* na górnym rysunku równa się połowie przekątnej tego kwadratu, *AF* i *CG* — są to prostopadłe opuszczone z wierzchołków na prostą *DE*, wreszcie odcinki *GH*, *GL* i *FK* są równe odcinkowi *AF*. Dolny rysunek wskazuje układanie trzech równych kwadratów z trójkątów i czworokątów otrzymanych z powyższego podziału.

H. Rozciąć kwadrat na trzy kwadraty, których stosunek pól będzie 4 : 3 : 2.



Na rysunku podajemy sposób rozcinania danego kwadratu na części, z których można będzie ułożyć trzy kwadraty o polach, których stosunek wynosić będzie 4 : 3 : 2. Jakie konstrukcje zostały zastosowane do wykonania sieci podziału — pozostawiamy domyślności Czytelnika. Tyle tylko powiemy, że przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego *6* jest równa połowie przekątnej danego kwadratu, a dłuższa podstawa trapezu *3* równa się 2/3 boku danego kwadratu. Oto gotowe kwadraty:

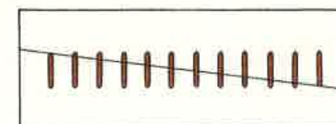


Zachęcamy Czytelnika, by oznaczając długość boku danego kwadratu przez *a* obliczył długości wszystkich odcinków stanowiących granice poszczególnych części powyższych figur.



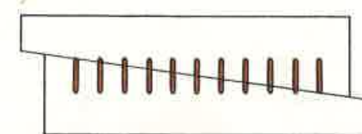
13. Tajemnicze zniknięcia

Należy wziąć tekturkę w kształcie prostokąta i narysować na niej 13 równych pałeczek w jednakowych odstępach, jak to widzimy na rysunku I.



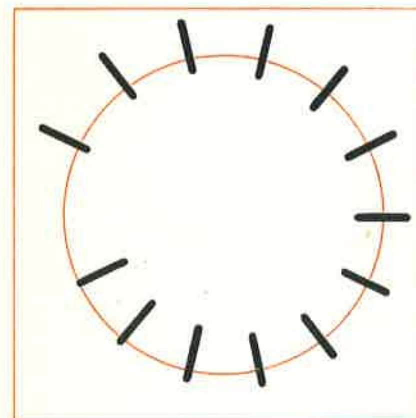
Rys. I

Następnie należy tekturkę przeciąć wzdłuż linii łączącej górny koniec skrajnej pałeczki lewej z dolnym końcem skrajnej prawej. Gdy rozcięte części przesuniemy o odległość dzielącą pałeczki, wówczas jedna pałeczka w sposób tajemniczy zginie, co sprawdzić można na rysunku II, a jeszcze lepiej na rzeczywistej deszczułce czy tekturce według powyższych wskazówek przez siebie przygotowanej.

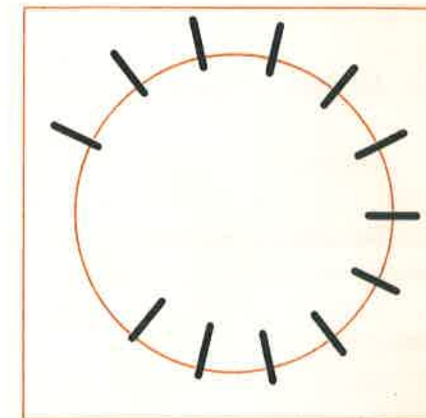


Rys. II

Jeszcze efektowniejsze jest tajemnicze zniknięcie trzynastej pałeczki na kartoniku kwadratowym z ruchomą częścią środkową wykonaną na wzór podanych obok rysunków.



Rys. III

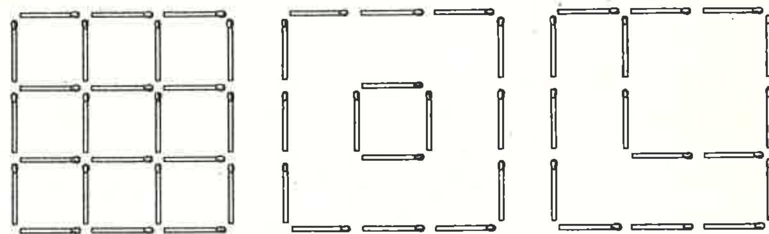


Rys. IV

14. Figle z zapałkami

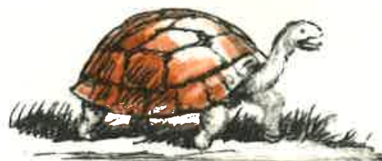
Z nieprzebranego mnóstwa sztuczek matematycznych z zapałkami przytaczamy na razie jedynie kilka nieco trudniejszych, gdyż łatwe każdy sam w wielkiej liczbie ułożyć potrafi. Nie ograniczamy więc inwencji Czytelników...

Z 24 zapałek ułożyć 9 kwadratów tak, aby następnie po odjęciu 8 zapałek, bez jakiegokolwiek przestawiania reszty zapałek powstały dwa kwadraty.



Z sześciu zapałek zbudować cztery trójkąty.

Należy w tym celu ułożyć na stole trzy zapałki w kształcie trójkąta, następnie przy pomocy trzech pozostałych zapałek zbudować tetraedr (czyli czworościan) o czterech ścianach trójkątnych, oparłszy każdą zapałkę jednym końcem w rogu leżącego trójkąta, a drugimi końcami wzajemnie je wsparłszy.



Ułóżmy z zapałek takie absurdalne równanie:

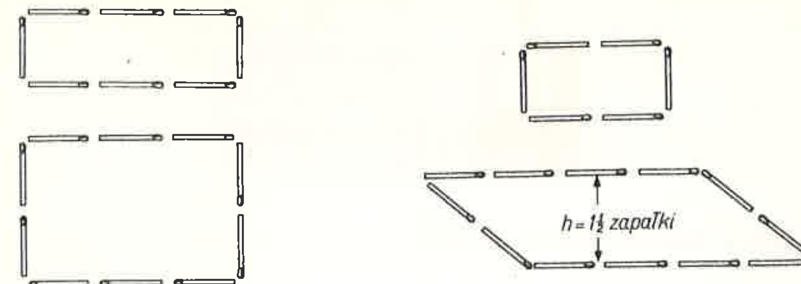
VII = I

Wystarczy przełożyć tylko jedną zapałkę, a to absurdalne równanie przeistoczy się w zupełnie prawidłowe.

Oto rozwiązanie, na które istotnie niełatwo „wpaść“ mimo długiego namysłu:

$\sqrt{I} = I$

Z osiemnastu zapałek łatwo ułożyć dwa czworoboki, z których jeden ma pole dwa razy większe od drugiego.



Natomiast nieporównanie trudniej jest tak manipulować zapałkami, żeby otrzymać jeden czworobok trzykrotnie większy od drugiego.

Figiel na tym polega, że mówi się wprawdzie o czworobokach, ale układa się za pierwszym razem prostokąty, przez co wpaja się w słuchacza i zarazem widza przekonanie, że powinien rozwiązać zadanie na prostokątach, co jest niewykonalne.



Niechaj ktoś weźmie dowolną ilość zapałek i ułoży je w dwa rzędy tak, by górny rząd liczył o jedną zapałkę więcej niż dolny. Nie patrząc na rezultat tych czynności dajemy polecenia:

1° usunąć z górnego rzędu jakąś wybraną przez siebie ilość zapałek, powiedzmy 7;

2° usunąć z dolnego rzędu tyle zapałek, ile ich zostało w górnym;

3° usunąć z górnego rzędu wszystkie zapałki pozostałe.

Teraz możemy — wciąż nie patrząc na stół — natychmiast powiedzieć dokładnie, ile zapałek pozostało.

Oczywiście liczba zapałek, które zostały, będzie o 1 mniejsza od tej, którą wymieniliśmy na początku, więc 6.

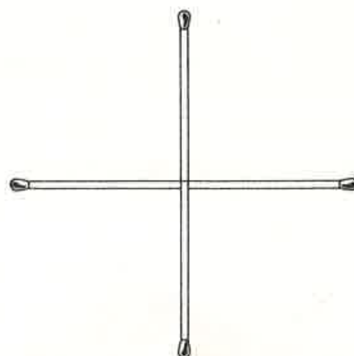
Za każdym powtórzeniem doświadczenia należy zmieniać liczbę wybraną, a także rozkład, to znaczy dawać polecenia, by w górnym rzędzie było o 2 lub o 3 zapałki więcej niż w dolnym.

Z ośmiu zapałek ułożonych w dwa rzędy przesunąć cztery tak, ażeby uformował się krzyż.

Oto pierwotny rozkład i rozwiązanie:



W końcu jeszcze takie zadanie:



Należy przesunąć jedną z tych zapałek w taki sposób, żeby powstał kwadrat.

Prosimy Czytelnika, by sam próbował rozwiązać ten figielek i dopiero w ostateczności szukał rozwiązania na stronicy 306.





15. Różne drobne żarciki matematyczne

Pewien sympatyczny jegomość, o którym stale wyrażano się: „to złoty człowiek", zapytał znajomego jubilera:

— Panie, ile też ja byłbym wart dla pana, gdybym był cały ze złota? Ważę 75 kg. Czy to trudno obliczyć?

— Och, nic łatwiejszego! Wystarczy wszak 75 000 gramów pomnożyć przez cenę jednego grama złota.

I wnet wyliczył olbrzymią sumę.

Lecz przy rozmowie tej był obecny pewien matematyk, który nie omieszkał wtrącić i swoje „trzy grosze":

— Panie złoty — zawołał — nie sprzedaj się pan za bezcen! Pan jubiler chce pana „oszwabić", boć jeśli teraz z krwi, ciała i kości ważysz pan 75 kg, to będąc ze złota, ważyłbyś pan przecież o wiele, wiele więcej.

— A, to prawda! dziękuję panu, żeś mnie pan ostrzegł i nauczył właściwie się cenić!



Powiedzmy, iż pomiędzy Warszawą a Poznaniem linia kolejowa wynosi równo 300 km. O jednej i tej samej godzinie wychodzi z Warszawy pociąg pośpieszny idący z prędkością 60 kilometrów na godzinę, z Poznania zaś pociąg towarowy o prędkości tylko 30 kilometrów na godzinę.

Który z tych pociągów będzie bliżej Warszawy w chwili spotkania?



Jak ułożyć w dziesięciu łóżkach jedenastu chłopców w taki sposób, żeby każdy spał oddzielnie?

Oto rozwiązanie: W pierwszym łóżku kładziemy tymczasowo dwóch chłopców, w drugim — trzeciego, w trzecim czwartego, w czwartym — piątego, w piątym — szóstego, w szóstym — siódmego, w siódmym — ósmego, w ósmym — dziewiątego, w dziewiątym — dziesiątego. Dziesiąte łóżko pozostaje na razie nie zajęte, przenosimy więc do niego jedenastego chłopca, który tymczasem leżał w pierwszym łóżku — i oto każdy z 11 chłopców śpi oddzielnie. Nieprawdaż?

Czy może płaskie zwierciadło dać kiedykolwiek obraz powiększony?

Owszem! Może powiększyć liczbę z górą 7 razy! Wystarczy na karcie wypisać liczbę 108 i zwrócić powierzchnię karty do płaskiego zwierciadła, a przeczytamy w zwierciadle aż 801.



Z podanych tu dziewięciu cyfr wykreślić należy sześć cyfr w taki sposób, żeby suma pozostałych wyniosła 20.

1 1 1
7 7 7
9 9 9

Oto rozwiązanie: Wykreślić trzeba jedynkę na miejscu pierwszym od lewej strony, wszystkie trzy siódemki i dwie dziewiątki od lewej ręki.

Mówi się o cyfrach, a sumuje się — liczby.



W bibliotece stoją dwa wielkie tomy bardzo uczonego dzieła: grubość jednego wynosi 3 cm, a drugiego 5 cm. Oba tomy są pięknie oprawne, a grubość oprawy wynosi 3 mm. Do biblioteki zakradł się robaczek — nie taki dwunożny „mól książkowy", łysy, żółty, w okularach, lecz prawdziwy mały żuczek, który gryzie papier. Dziennie wierci sobie w papierze tunel długości 1 cm, w oprawie zaś tylko 6 mm. W ciągu ilu dni przegryzie on te dzieła od pierwszej stronicy do ostatniej?

Oczywiście w ciągu jednego dnia, gdyż książki w bibliotece stoją zawsze tak, że aby przejść od pierwszej strony pierwszego tomu do ostatniej drugiego potrzebuje robaczek przegryźć tylko dwie oprawy.



Dziewięć osób należy obdzielić dziewięciu wielkimi pięknymi jabłkami, ale tak, żeby każdy dostał po jabłku i żeby jednak jedno jabłko zostało w koszyku.

— Należy ośmiu osobom dać po jednym jabłku, a ostatniej osobie również jedno jabłko, dziewiąte, lecz ... w koszyku. Warunek zadania będzie spełniony całkowicie.

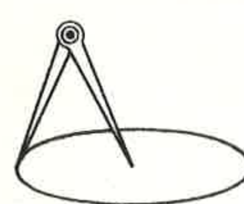


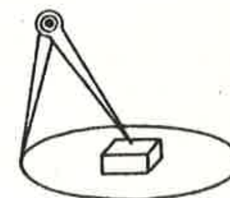
Czy można narysować cyrklem z jednego punktu elipsę?

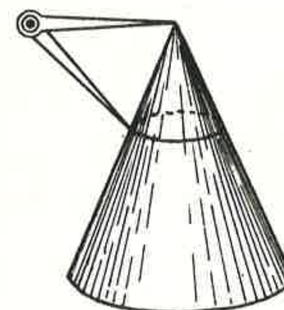
— Można, trzeba tylko karton, na którym elipsa ma być nakreślona, położyć na bocznej powierzchni drewnianego walca albo rury tekturowej lub z miękkiego metalu odlanej. Wówczas jednym zatoczeniem zwykłego cyrkla wyrysujemy elipsę.

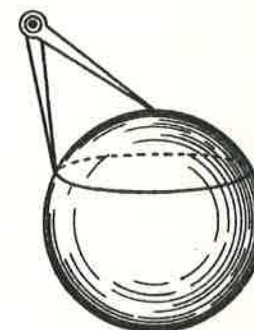


A oto kilka różnych odpowiedzi na zapytanie, czy można jednym rozwarciem cyrkla zataczać okręgi o rozmaitych średnicach:









ODPOWIEDZI

Podajemy tu odpowiedzi do niektórych zadań.

Do str. 16 — *Jeszcze kilka zadań zegarowych*

C. Po 360 dniach

Do str. 41 — *Zamiana zajęcy na kury*

12 zajęcy i 18 kur

Do str. 69 — *Małpi skok*

Z wysokości 30 łokci

Do str. 71 — *Łodyga lotosu*

Głębokość wody w pierwszym zadaniu wynosi $3\frac{3}{4}$ łokcia, w drugim zadaniu 12 stóp.

Do str. 77 — *Problemat Leonarda z Pizy*

$BE = 18$, $ED = 32$

Do str. 97 — *Zawiła kronika rodzinna*

Terenia ma $1\frac{3}{4}$ roku, Jaś $3\frac{1}{2}$ roku, Nela $5\frac{1}{4}$, Sławek $10\frac{1}{2}$ lat, Hania 21 lat.

Do str. 106 — *Varia*

I. 30 śliwek; II. Po 75 skokach; III. 12 królików i 23 kury; IV. 94 jajka; V. Po 9 jabłek; VII. Po 60 dniach zarośnie ćwierć stawu, po 62 dniach — połowa, a po 64 dniach — cały staw; VIII. 12 koni.

Teraz damy rozwiązanie figielka z zapałkami ze stronicy 302:



Prawda, że w środku figury powstał kwadrat?

A obok drugie rozwiązanie tego figla: liczba 4 też jest kwadratem, mianowicie kwadratem liczby 2.

SPIS RZECZY

Str.

II. CIEKAWE WŁAŚCIWOŚCI LICZB I DZIAŁAŃ MATEMATYCZNYCH

III. FIGURY MAGICZNE

IV. PSEUDARIA

V. ODGADNIENIA

VI. Z TAJNIKÓW SZACHOWNICY, KART I DOMINA

Szachownica

Karty

Domino

VII. GRY, ZABAWY, ŁAMIGŁÓWKI, SZTUKI I FIGLE MATEMATYCZNE